Formative Leistungsbewertung im Mathematikunterricht

STEFAN GÖTZ, WIEN; EVA SATTLBERGER, WIEN

In der Bildungswissenschaft werden kriteriale und individuelle Komponenten der Leistungsbeurteilung als besonders lernförderlich angesehen. Daraus resultiert das Konzept der formativen Leistungsbewertung, das darin besteht, unterrichtliche Maßnahmen an die aktuellen Bedürfnisse und an die bereits vorhandenen Kompetenzen der Lernenden anzupassen. Um diesen Zugang auf Schulebene zu realisieren, sind verschiedene Maßnahmen (z. B. Grundkompetenzkonzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik an AHS) gesetzt und fachdidaktische Konzepte (z. B. innere Differenzierung) entwickelt worden. Die daraus resultierenden fachdidaktischen Konsequenzen werden identifiziert und diesbezügliche Vorschläge für den Unterricht herausgearbeitet.

1. Einleitung und Begriffsbestimmung

Leistungsbeurteilung ist sowohl im wissenschaftlichen Diskurs als auch in der schulischen Praxis ein sehr komplexes Thema. In der Literatur wird meist zwischen Leistungsfeststellung und Leistungsbewertung unterschieden und unter dem Überbegriff „Leistungsbeurteilung“ zusammengefasst. Leistungsbeurteilung dient allgemein dem Erfassen von Lernwirkungen des geplanten bzw. durchgeführten Unterrichts (vgl. Arnold & Lindner-Müller 2009, S. 323 f.) bzw. informiert darüber, auf welchen Teilgebieten die Schüler:innen bestimmte Lernziele erreicht haben und auf welchen Teilgebieten noch ergänzender Unterricht nötig ist (vgl. LBVO 2016: §1 Abs. 2). Dabei liefern Leistungsfeststellungen als Messungen Informationen über den Wissens- und Kenntnisstand der Schüler:innen. Leistungsbewertung beschreibt den Vorgang des Bewertens und der Gewichtung der gemessenen Leistung, also die Evaluierung einer oder mehrerer Leistungsfeststellungen nach vorgegebenen Kriterien, um daraus Konsequenzen zu ziehen (z. B. die Umsetzung der Messungen in Noten). Demzufolge zielt Leistungsfeststellung auf Prozesse während des Lernens im Unterricht ab, um diese lernförderlich beeinflussen zu können, wohingegen (punktuelle) Leistungsbewertung bilanzierend Lernergebnisse nach den Lern- und Unterrichtseinheiten erfasst (vgl. Schmidinger et al. 2016, S. 59). Es werden demnach unterschiedliche Daten in unterschiedlichen Phasen des Unterrichts erhoben und diese Daten haben verschiedene Funktionen.

Die pädagogischen Funktionen von Leistungsbeurteilung beziehen sich auf die Steuerung des Lehr-Lerngeschehens (vgl. Eder et al. 2009, S. 248 f.). Inhalte, die Gegenstand einer Leistungsbewertung (Prüfung) sind, haben größere Bedeutung für Schüler:innen als jene, die das nicht sind (ebd.). Zudem erfüllen Leistungsfeststellungen und -bewertungen eine Feedbackfunktion für Schüler:innen und für Lehrer:innen. Die Rückmeldung kann sich dabei sowohl auf den Lernprozess als auch auf dessen Ergebnis beziehen. Gesellschaftliche Funktionen betonen vor allem Unterschiede zwischen den Schüler:innen in dreierlei Hinsicht: „Die Zuordnung zu unterschiedlichen Bewertungsklassen (*Klassifizierungsfunktion*) ist Voraussetzung für die Zuweisung zu verschiedenen Laufbahnen innerhalb und außerhalb der Schule (*Allokationsfunktion*) und zur Vergabe von Berechtigungen (*Selektionsfunktion*).“ (Eder et al. 2009, S. 248, Hervorhebungen im Original). Personenbezogene Funktionen beeinflussen die Einstellung der Schüler:innen zur Schule und wirken sich auf das Selbstkonzept und auf die Vorstellung des eigenen Leistungsvermögens der Schüler:innen aus (ebd.).

Schulische Leistungen sind ohne Bezugsnorm wenig aussagekräftig und kommen so für eine gesellschaftlich relevante Beurteilung nicht in Frage. Leistungen unterliegen immer entweder einer kriterialen (lern- bzw. lehrzielbezogenen), sozialen oder individuellen (erbrachte Leistungen einer:eines Lernenden werden mit deren:dessen früheren Leistungsstand verglichen) Bezugsnorm, wobei jede in der Regel zu einem anderen Beurteilungsergebnis führt. Es kommt daher oft zu einer Parallelführung, wie sie auch die Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO 2016) vorsieht (Schmidinger et al. 2016, S. 59).

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 55, 2023, S. 39 - 64.

> „Die Heranziehung der lehrzielbezogenen Norm ist – v. a. wenn diese für individuelle Rückmeldungen um die individuelle Norm ergänzt wird – in der erziehungswissenschaftlichen Literatur unumstritten. Sie ist die vorzugswürdige Norm
>
> - im Interesse der Lehr-/Lern-Steuerung,
> - unter dem Aspekt der Beurteilungsgerechtigkeit,
> - mit Blick auf die Berichtsfunktion in Form von Noten und Zeugnissen und
> - unter dem Gesichtspunkt der Hinführung der Schüler/innen zur sachlich begründeten Selbsteinschätzung.“

(Eder et al. 2009, S. 249).

Alternativ wird die Beurteilung von Schüler:innenleistungen nach einer Durchschnittsorientierung durchgeführt (soziale Bezugsnorm): Die Beurteilungsmaßstäbe stehen vor der Durchführung der Prüfung nicht fest, sondern werden erst im Verlauf des Beurteilungsprozesses definiert (vgl. Neuweg 2019, S. 71).

2. Formative und summative Formen von Leistungsbeurteilungen

Leistungsbeurteilung hat gemäß der Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO) sowohl eine lernförderliche formative als auch eine ergebnisorientierte summative Funktion.

> „Der Lehrperson werden damit zwei verschiedene, durchaus antinomische Rollen zugeschrieben, die oft schwierig zu vereinen sind: einerseits die eines Sachverständigen, der in der summativen Funktion sein Fachurteil abgibt und andererseits die des lernunterstützenden Coachs in der formativen Funktion der Leistungsbeurteilung.“

(Schmidinger et al. 2016, S. 59).

Formative Leistungsbewertung (FLB) ist ein didaktisches Prinzip zur individuellen Förderung von Schüler:innenleistungen. Unter FLB wird eine (komplexe) Unterrichtsintervention verstanden, die auf Basis von Feedback (auf Aufgaben- und Prozessebene sowie auf Ebene der Selbstregulation) Leistungsfeststellung und -bewertung mit individuellen Anregungen zum Weiterlernen und einer Anpassung des Unterrichts an Schüler:innenbedürfnisse verbindet. Die Wurzeln der FLB liegen im englischsprachigen Raum der 1960er Jahre, wo z. B. Bloom (1969, p. 48) Lernstandsdiagnosen ohne Benotung als Feedback zur Steuerung des Unterrichtsprozesses beschreibt.

Beispielsweise können so genannte schwierigkeitsgestufte Aufgabensets eingesetzt werden, die im Sinne der inneren Differenzierung (Abschnitt 4.) und Individualisierung sowie im Kontext der Selbstbestimmung den Schüler:innen die Möglichkeit geben, einfachere bzw. anspruchsvollere Aufgabenpakete zu bearbeiten und somit eine lernförderliche Wirkung erzielen sollen. So sind etwa im ersten Paket Aufgaben angeführt, die relativ einfach zu bearbeiten sowie von der Art vertrauter sind und jedenfalls von allen Schüler:innen gekonnt werden sollten. Das zweite Paket bietet Aufgabenstellungen, die vermehrt Transferwissen verlangen. Im dritten Paket sollen sich Schüler:innen mit zumindest im Ansatz neuartigen und komplexeren Aufgaben befassen. Diese richten sich an jene, die die klassischen Übungsaufgaben schon gut beherrschen und eine neue Herausforderung suchen. Exemplarisch zeigen die Abbildungen 1 bis 3 diese Stufung im Bereich der beschreibenden Statistik.

Allgemein werden verschiedene Formen der FLB kategorisiert: Ungeplante On-the-Fly Formative Assessments, Planned-for-Interaction Formative Assessments als Teil der Unterrichtsplanung und Embedded-in-the-Curriculum Formative Assessments als von Testinstitutionen bereitgestellte diagnostische Aufgabensammlungen mit dazugehörigen Auswertungsanleitungen. Während die ersten beiden reine Maßnahmen zur Unterrichtsintervention sind, sind Curriculum-Embedded-Formative Assessments standardisierte Messinstrumente, die – je nach Einsatzform – sowohl formativen als auch summativen Charakter haben können (vgl. Abschnitt 3. und Schmidinger et al. 2016, S. 62).

In einem kleinen Stadtpark kommen vor allem die Baumarten Ahorn, Birke, Eiche und Linde vor. Die Tabelle zeigt die Anzahl der Bäume. Vervollständige das Diagramm durch Einzeichnen von senkrechten Balken so, dass es zur Tabelle passt.

Baumart	Anzahl
Ahorn	8
Birke	12
Eiche	4
Linde	8

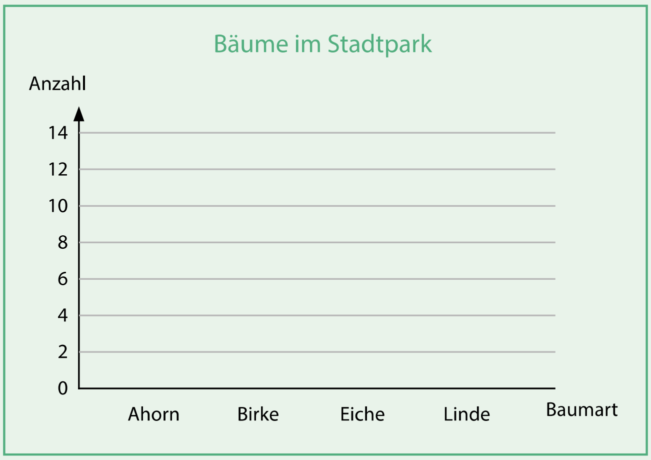


Abb. 1: Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset – Paket A (Benischek et al. 2023, S. 164).

Im Park wurden die Bäume gezählt: 10 Ahornbäume, 6 Birken, 12 Eichen und 4 Linden.

Stelle das Ergebnis der Zählung im Diagramm dar.

Beschrifte die Achsen und zeichne passende senkrechte Balken ein.

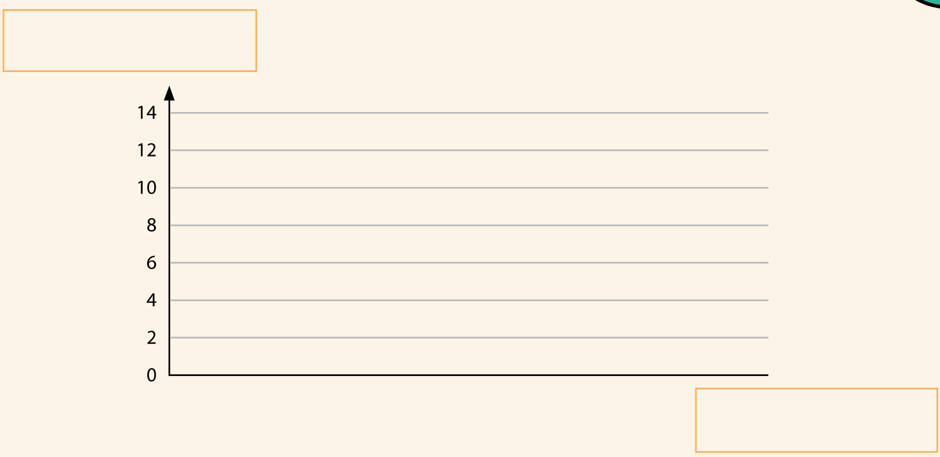
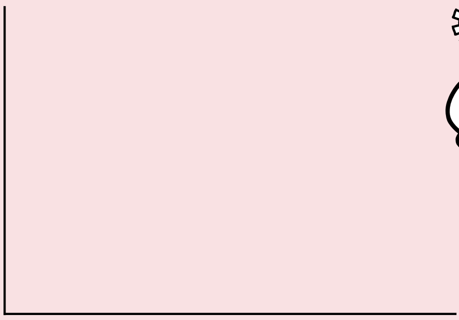


Abb. 2: Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset – Paket B (Benischek et al. 2023, S. 166).

In einer Parkanlage kommen hauptsächlich die Baumarten Ahorn, Birke, Eiche und Linde vor. Eine Zählung ergab folgenden Baumbestand:
27 Ahornbäume, 68 Birken,
51 Eichen und 79 Linden

Stelle den Baumbestand in einem Balkendiagramm dar. Beschrifte und skaliere die Achsen passend.

Welcher Diagrammtitel passt?



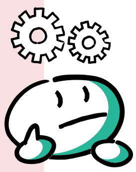


Abb. 3: Schwierigkeitsgestuftes Aufgabenset – Paket C (Benischek et al. 2023, S. 168).

Schmidinger et al. (2016, S. 60) fassen die Wirksamkeit der FLB folgendermaßen zusammen: Während FLB auf Klassenebene positive Wirkung auf das Lernen aller Schüler:innen, besonders auf jenes der leistungsschwächeren, zeigt, können auf Ebene von standardisierten Testungen empirisch keine Verbesserungen der Schüler:innenleistungen nachgewiesen werden, da der unmittelbare Zusammenhang zwischen Lernprozess und Ergebnisrückmeldung zur Unterstützung des Lernens fehlt und standardisierte Testungen mit ihren Ergebnissen zudem nur schwer in den Unterricht zu integrieren sind. Betont wird damit vor allem die soziale Bezugsnorm im Sinne der Durchschnittsorientierung (vgl. Abschnitt 1.).

3. Zentrale Leistungsbeurteilungen im Laufe eines Schüler:innenlebens

Im österreichischen Schulsystem werden zurzeit verschiedene Formen von standardisierten Messinstrumenten für Schüler:innenleistungen eingesetzt. Sowohl die Bildungsstandards im Zuge der sogenannten individuellen Kompetenzmessungen PLUS (iKM^{PLUS}) als auch die Grundkompetenzen für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik können im Sinne der Lernzielorientierung interpretiert werden. Für den Unterricht bieten sich diese Strukturierungen des Lehrstoffs unter Einbezug von zugehörigen Lernmaterialien und freigegebenen Leistungsüberprüfungen für formative Leistungsfeststellungen an. Im Folgenden werden diese Instrumente ob ihrer Relevanz für das Thema kritisch analysiert.

Die iKM^{PLUS} wird in der 3. und 4. bzw. in der 7. Schulstufe zur Erfassung fachbezogener und zur Einschätzung fächerübergreifender Kompetenzen von Schüler:innen herangezogen. Sie lässt sich in verpflichtende und freiwillige Module untergliedern, die den jeweiligen Anforderungen der Primar- bzw. Sekundarstufe angepasst sind. Ziele dabei sind durch standardisierte curriculum-basierte Instrumente die Kompetenzen von Schüler:innen bereits ab der 3. Schulstufe sichtbar zu machen und den Lernfortschritt einzelner Schüler:innen zwischen den Erhebungszeitpunkten zu beobachten. In dieser Funktion sollen die Überprüfungen also für Schüler:innen und Lehrer:innen förder- und unterrichtswirksam werden, gleichzeitig werden die Schüler:innenleistungen einer sozialen Bezugsnorm der jeweiligen Jahrgangsgruppe im zeitlichen Verlauf unterworfen. Weiters werden mit den Erhebungen evidenzbasiert Daten für gezielte Schul- und Qualitätsentwicklung auf Systemebene unter den Stichworten „Qualitätsmanagement“ und „Bildungsmonitoring“ generiert. Im Fachbereich Mathematik werden die so genannten Basismodule durch Fokusmodule, die einen genaueren Blick auf einzelne Schüler:innen bei auffälligen Ergebnissen in den Basismodulen erlauben, und durch Orientierungsmodule auf der 5. und 9. Schulstufe zur Verschaffung eines Überblicks über den Leistungsstand der Klasse ergänzt (vgl. Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen – IQS 2022).

Die Ergebnisse der iKM^{PLUS} dürfen – laut Definition – weder Einfluss auf die Beurteilung von Schüler:innenleistungen nehmen, noch dürfen sie als Kriterium für die Aufnahme an einer weiterführenden Schule herangezogen werden. Sie dienen lediglich der individuellen Förderung von Schüler:innen (im Sinne von FLB), der Unterrichtsentwicklung, sowie der Schul- und Qualitätsentwicklung.

Kritisch sei dazu angemerkt, dass es kein gesellschaftlich ausverhandeltes Anspruchsniveau dieser Messinstrumente gibt, außer jenes der Sozialnorm über die Jahrgangsgruppe. Zudem erscheint es fraglich, ob Lehrer:innen, die die Ergebnisse der Messungen als Basis für Elterngespräche heranziehen sollen, diese auch wirklich klar von den Leistungsbewertungen im eigenen Unterricht trennen können und wollen (Problematik: Testergebnis vs. Note). Als dritter Kritikpunkt sei erwähnt, dass ein derartiges Instrument als Entscheidungsbasis für eine sehr frühe (gezielte) Selektion von Schüler:innen aufgefasst werden könnte (vgl. Gruber 2020), die in ihrem Ausschluss äußerst professionelles Lehrer:innenhandeln voraussetzt.

Im Sinne einer bildungstheoretischen Orientierung des Mathematikunterrichts legen die den iKM^{PLUS} Messungen zugrundeliegenden Bildungsstandards konkret formulierte Lernergebnisse in Form von „Könnensbeschreibungen“ fest, die als Grundlage für eine weiterführende mathematische Ausbildung bzw. für die Bewältigung von mathematischen Anforderungen, die über Alltagserfordernisse hinausgehen, hilfreich erscheinen und somit in Richtung Anschlussfähigkeit fokussieren. Als zweite Säule der bildungstheoretischen Orientierung wird die Lebensvorbereitung angeführt: Mathematik strukturiert, ordnet und gestaltet die Welt, ist sowohl Erkenntnis- als auch Konstruktionsmittel und ist ein Werkzeug zur Lösung von mathematisch modellierten Problemen (IQS 2022, S. 1). Dazu werden vier Inhalts- (Zahlen und Maße; Variable, funktionale Abhängigkeiten; Geometrische Figuren und Körper; Statistische Darstellungen und Kenngrößen) mit vier Handlungsbereichen (Darstellen, Modellbilden; Rechnen, Operieren; Interpretieren; Argumentieren, Begründen) verknüpft (IQS 2022, S. 5), und diese 16 Knoten werden mit je drei Kompetenzen aufsteigender Komplexität verbal beschrieben (IQS 2022, S. 12 ff.). Ein Beispiel dazu: zum Handlungsbereich „Darstellen, Modellbilden“ und zum Inhaltsbereich „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ werden die Kompetenzen

„Die Schülerinnen und Schüler können

- gegebene statistische Sachverhalte (Daten) in eine (andere) mathematische Darstellung übertragen, wobei dafür das unmittelbare Einsetzen von Grundkenntnissen erforderlich ist,
- gegebene statistische Sachverhalte (Daten) in eine (andere) mathematische Darstellung übertragen, wobei dafür auch Verbindungen zu anderen mathematischen Inhalten (Begriffen, Sätzen, Darstellungen) oder Tätigkeiten hergestellt werden müssen,
- Aussagen über die Angemessenheit sowie über Stärken und Schwächen verschiedener Darstellungen (Modelle) statistischer Sachverhalte machen und bewerten.“

angeführt (IQS 2022, S. 13). Beispielaufgaben sollen diese Kompetenzen konkretisieren (Abbildung 4):

> „Die Klasse besuchen insgesamt 20 Kinder. Das Diagramm zeigt, was es heute zur Jause gibt. Wie viele Kinder essen ein Butterbrot?“

ist eine zum Knoten „Interpretieren – Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ (IQS 2022, S. 10).

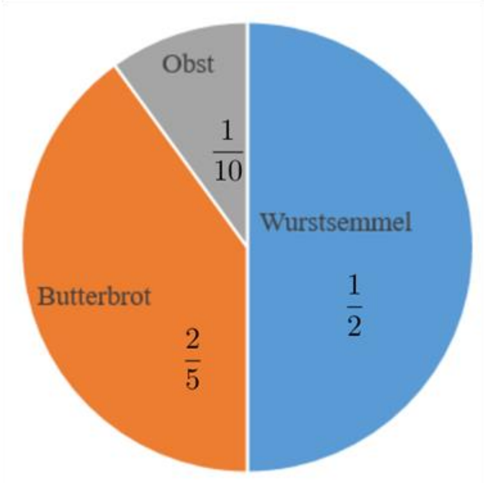


Abb. 4: Kreisdiagramm zur Beispielaufgabe.

Zur Komplexitätsdimension werden bei den Beispielaufgaben *keine* Aussagen getroffen:

> „Eine objektive Zuordnung von Aufgaben zu einem Komplexitätsbereich gestaltet sich oftmals als schwierig. Zudem erlaubt es der Umfang der iKM^{PLUS} nicht, alle 48 Knotenpunkte mit genügend Aufgaben abzubilden, um weiterhin eine genügend aussagekräftige Rückmeldung für jeden Knotenpunkt zu gewährleisten. Daher wird in der iKM^{PLUS} auf die Komplexitätsdimension verzichtet und auch in der Rückmeldung nicht weiter auf diese Dimension hingewiesen. Das Modell wird um die Komplexitätsdimension reduziert.“

(IQS 2022, S. 4). Man wird sehen, ob diese Unstimmigkeit in der realen Umsetzung zu Problemen in der Interpretation der Ergebnisse auf den verschiedenen Ebenen (Klasse, Schule, System) führen wird.

Ähnlich wie durch die Bildungsstandards für die iKM^{PLUS} werden für die standardisierte Reifeprüfung in Mathematik (an Gymnasien) in Österreich Grundkompetenzen als grundlegende mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten definiert. Dem Fischer'schen Konzept der Höheren Allgemeinbildung (Institut für Didaktik der Mathematik – IDM 2009, S. 8) folgend ist die Sicherung mathematischer Grundkompetenzen im Sinne einer Lebensvorbereitung im weiteren Sinn für Schüler:innen anstrebenswert:

> „Die Kommunikation zwischen Expert(inn)en und Lai(inn)en wird heute als ein zentrales Problem unserer arbeitsteilig organisierten, demokratischen Gesellschaft gesehen: Der mündige Bürger und die mündige Bürgerin werden in vielen Situationen des öffentlichen, beruflichen und privaten Lebens Expert(inn)enmeinungen einholen müssen oder werden mit Meinungen von Expert(inn)en konfrontiert, die sie verstehen, bewerten und zu ihrer eigenen Erfahrungswelt in Beziehung setzen müssen, um entsprechende Entscheidungen treffen zu können."

(ebd.).

Mathematische Grundkompetenzen sind demnach für den Unterrichtsgegenstand grundlegend, längerfristig verfügbar und gesellschaftlich relevant (IDM 2009, S. 7, S. 13). Überprüft wird der Erwerb dieser Grundkompetenzen in der seit 2015 an Gymnasien in Österreich verpflichtenden standardisierten schriftlichen Reifeprüfung, die einen wesentlichen Bereich mathematischer Kompetenzen gesetzeskonform abbildet. Mit dem Ziel der Sicherung mathematischer Grundkompetenzen bildet der Grundkompetenzkatalog einen Ausgangs- und Bezugspunkt eines nachhaltig ausgerichteten Unterrichts und einer zeitgemäßen lernförderlichen Leistungsbeurteilung im Unterrichtsgegenstand Mathematik (vgl. [https://www.matura.gv.at/srdp/mathematik]). In diesem Sinne wurden Grundkompetenzen im Rahmen der standardisierten Reifeprüfung in Mathematik in sogenannten Teil 1-Aufgaben abgeprüft, wobei jede Aufgabe auf eine bestimmte Grundkompetenz fokussiert. Laut LBVO (2016) konnten Schüler:innen bis 2019 ein Genügend erreichen, wenn die

> „nach Maßgabe des Lehrplanes gestellten Anforderungen in der Erfassung und in der Anwendung des Lehrstoffes sowie in der Durchführung der Aufgaben in den wesentlichen Bereichen überwiegend erfüllt"

(LBVO 2016, Beurteilungsstufen (Noten)) wurden. Konkretisiert wurde dies so, dass im Teil 1 eines Prüfungstermins mindestens 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst werden mussten (für jede richtig gelöste Teil 1-Aufgabe gibt es einen Punkt), um die Arbeit positiv bewerten zu können.

Gesellschaftlich war dieser Transfer der Notendefinition auf die definierten Grundkompetenzen nicht haltbar:

> „**Ungerechte Form der Beurteilung:** […] Im Extremfall kann man sogar mit 16 von 48 Punkten (33,3%) ein Genügend, aber auch mit 35 von 48 (72,9%) Punkten ein Nicht genügend erhalten."

[https://www.openpetition.eu/at/petition/online/zentralmatura-in-mathematik-wir-wollen-eine-reform, Hervorhebung im Original]. Die Rechnung resultiert daraus, dass man theoretisch 15 Punkte aus Teil 1 und 20 von 24 Punkten aus dem viel komplexeren Teil 2 der standardisierten Reifeprüfung lukrieren konnte. (Vier Punkte in Teil 2 wurden als sogenannte „Ausgleichspunkte" gekennzeichnet, die Teil 1 zugerechnet wurden, wenn das zum Erreichen einer positiven Note nötig war.) Tatsächlich ist das u. W. nie vorgekommen.

Auch das Konzept „Grundkompetenz" ist aufgeweicht worden. Sie haben ursprünglich als nicht mehr teilbar gegolten. Nun können bei manchen Teil 1-Aufgaben auch halbe Punkte (!) vergeben werden: Abbildung 5. Die zur Aufgabe in Abbildung 5 gehörende Grundkompetenz lautet:

> „quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können"

[https://www.matura.gv.at/srdp/mathematik].

Weiters ist „Textlastigkeit" den komplexeren Teil 2-Aufgaben vorgeworfen worden:

Parameter einer quadratischen Gleichung

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + k \cdot x + 4 \cdot k = 0$ mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die zwei unterschiedlichen Werte k_1 und k_2 von k, für die die gegebene Gleichung genau eine Lösung hat.

k_1 = ______________________________

k_2 = ______________________________

[0/½/1 P.]

Abb. 5: Teil 1-Aufgabe 3 des Wintertermins 2020/21 Mathematik an AHS vom 12. Jänner 2022 [https://www.matura.gv.at/downloads/download/wintertermin-2020-21-mathematik-ahs].

> „**Nachteil für sprachlich schwächere Schüler und Schülerinnen:** Die Schwierigkeit der Teil 2 Aufgaben liegt häufig in der Überfrachtung mit Text, mathematisch werden jedoch bloß Grundkompetenzen geprüft."

[https://www.openpetition.eu/at/petition/online/zentralmatura-in-mathematik-wir-wollen-eine-reform, Hervorhebung im Original]. Ein „Paradebeispiel" ist die Teil 2-Aufgabe 3 „Blutgruppen" des Haupttermins 2015 Mathematik an AHS vom 11. Mai 2015. Der Einleitungstext lautet:

> „Die wichtigsten Blutgruppensysteme beim Menschen sind das AB0-System und das Rhesussystem. Es werden dabei die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 unterschieden. Je nach Vorliegen eines bestimmten Antikörpers, den man erstmals bei Rhesusaffen entdeckt hat, wird bei jeder Blutgruppe noch zwischen *Rhesus-positiv* (+) und *Rhesus-negativ* (–) unterschieden. A– bedeutet z. B. Blutgruppe A mit Rhesusfaktor negativ."

[https://www.matura.gv.at/downloads/download/haupttermin-2014-15-mathematik-ahs, Hervorhebungen im Original]. Es folgen drei Kreisdiagramme und zwei Tabellen, die die Verteilung der Blutgruppen mit den Rhesusfaktoren in verschiedenen Populationen zeigen und die (Nicht-)Verträglichkeit zwischen den Blutgruppen bei Transfusionen. Die Angabe umfasst eine A4-Seite (ebd.).

Vohns et al. (2019) haben daraufhin die Angabetexte über mehrere Jahrgänge bei der standardisierten Reifeprüfung in Mathematik an AHS mit jenen der BHS, mit jenen des bayerischen Zentralabiturs, mit jenen der Deutschmatura an AHS in Österreich, mit dem ersten Kapitel eines Harry Potter-Bandes und mit einem Standard-Mietvertrag verglichen. Dabei stellte sich heraus, der Anteil an Bildungssprache bei den AHS-Angaben höher ist als bei jenen in den BHS oder in Bayern, niedriger aber als in Deutsch oder bei dem Mietvertrag (!). Davon ist wieder der Anteil an nichtmathematischer Bildungssprache deutlich höher als in Bayern, aber in etwa so wie in den BHS (deren Mathematikmatura niemals in der öffentlichen Kritik stand). Schließlich ist eine hohe (durchschnittliche) Anzahl an Worten bei den Angaben der AHS festgestellt worden (Vohns et al. 2019, S. 105). Diese Ergebnisse passen gut zur (ursprünglich) intendierten Höheren Allgemeinbildung, die eine

> „Betonung *elaborativer Verständniselemente*, im Sinne einer flexiblen Anwendung mathematischen Wissens in unterschiedlichen, auch weniger vertrauten außermathematischen Kontexten, […] (also eine bestimmte Spielart von dem, was man international gemeinhin als ‚mathematical literacy' bezeichnen würde) […]"

(Vohns et al. 2019, S. 96, Hervorhebung im Original) als Kernelement mit sich bringt.

Um die Lesbarkeit der untersuchten Texte vergleichen zu können, wurde der Lesbarkeitsindex gSMOG (Simple Measure of Gobbledygook – german) herangezogen (Vohns et al. 2019, S. 102). Wenig überraschend stellen Vohns et al. (2019, S. 106) fest:

> „Erwartungsgemäß gilt der Text von ‚Harry Potter und der Stein der Weisen' (Kapitel 1) gemäß gSMOG als klar weniger anspruchsvoll (5.74), der Mietvertrag als klar anspruchsvoller (11.54) wie sämtliche Gesamtprüfungstexte."

Tiefergehende Analysen in Vohns et al. (2019, S. 107) zeigen weiters, dass

> „in Summe festzuhalten [ist], dass sich weder insgesamt, noch unter Kontrolle von Prüfungsjahrgang, mathematischem Inhaltsgebiet, Aufgabenformat und/oder Kontextbereich signifikante Zusammenhänge zwischen der empirischen Aufgabenschwierigkeit und (a) Anteil/Anzahl bildungs- und fachsprachlicher Elemente, (b) Anteil/Anzahl nicht textueller Elemente (Formeln, Grafiken), (c) standardisierter Lesbarkeit [bezogen auf den Lesbarkeitsindex Simple Measure of Gobbledygook – german; Anmerkung S. G.] oder (d) Anzahl sprachlicher Schwierigkeiten […] nachweisen lassen (Niveau jeweils $p < 0.05$, sowohl für Pearson- als auch für Rang-Korrelationen)."

Es konnte nur ein signifikanter (wenn auch schwacher) Zusammenhang zwischen Textlänge und Schwierigkeit von offenen Aufgaben (empirische Lösungshäufigkeit) festgestellt werden (12% Varianzaufklärung, Rangkorrelation $r = 0.35$ in Vohns et al. (2019, S. 108)).

Um das Anspruchsniveau der Aufgabenstellungen bei der standardisierten Reifeprüfung in Mathematik an AHS vergleichen zu können, wurde das so genannte O-M-A-Modell (Operieren, Modellieren, Argumentieren) konzipiert (Siller et al. 2019). Damit werden den Aufgaben Handlungsbereiche und die Kompetenzstufen

1. Ausführen einer Handlung durch unreflektiertes Nachvollziehen
2. Ausführen einer Handlung nach Vorgabe
3. Ausführen einer Handlung nach Einsicht
4. Selbstständige Prozesssteuerung

(vgl. dazu Meyer 2007) zugeordnet, um eine Einschätzung des „Schwierigkeitsgrads" eines Prüfungstermins treffen und Prüfungstermine über die Jahre hinweg vergleichen (kriteriale Bezugsnorm: Abschnitt 1.) zu können (Siller et al. 2019). Aufgaben auf der vierten Kompetenzstufe werden nicht eingesetzt.

In Fuchs (2017) haben $n = 6$ Lehrer:innen die Teil 2-Aufgaben des Haupttermins 2016 nach dem O-M-A-Modell geratet. Unter den zu bewertenden 24 Teilaufgaben gab es nur bei einer (!) eine vollständige Übereinstimmung. Bei einer Teilaufgabe wurden gar alle drei (!) Handlungsbereiche genannt: Abbildung 6. Die Aufforderung in dieser Teilaufgabe erfordert Operieren (Differenzieren) und Interpretieren, welches sowohl als innere Argumentation als auch als Modellieren einer Realsituation gemäß dem O-M-A-Modell aufgefasst werden kann.

Die Auswertung des Ratingergebnisses zeigt dementsprechend ein $\kappa_{\text{mit Stufung}} = 0.28$ (Berücksichtigung der Kompetenzstufen) und ein $\kappa_{\text{ohne Stufung}} = 0.48$ (nur die Zuordnung zu den Handlungsbereichen wurde berücksichtigt) bei sieben Rater:innen, denn die Zuordnung des Ministeriums wurde ebenfalls berücksichtigt (Fuchs 2017, S. 39 ff.). Als Gründe für diese mangelnde Übereinstimmung kann das Fehlen des Handlungsbereiches „Interpretieren" und die fehlende Vertrautheit mit der Klassifizierung von Aufgaben nach Handlungen vermutet werden (Fuchs 2017, S. 65).

Aufgabe 1

Intercity-Express (ICE)

Als ICE werden verschiedene Baureihen von Hochgeschwindigkeitszügen der Deutschen Bahn bezeichnet. Mit einer Höchstgeschwindigkeit von bis zu 330 km/h (rund 91,7 m/s) handelt es sich dabei um die schnellsten Züge Deutschlands. Sie sind ca. 200 Meter lang und ca. 400 Tonnen schwer und bestehen aus jeweils acht Wagen. Im Rahmen von Zulassungsfahrten müssen Beschleunigungs- und Bremstests absolviert werden. Ergebnisse dieser Tests können grafisch dargestellt werden.

b) Bei einem Bremstest werden Daten aufgezeichnet. Diesen Daten kann man für den zurückgelegten Weg $s(t)$ entnehmen: $s(t) = 70 \cdot t - 0{,}25 \cdot t^2$ mit t in Sekunden und $s(t)$ in Metern ab Bremsbeginn.

Geben Sie die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v_2 für den Bremstest in Form von $v_2(t) = k \cdot t + d$ an und deuten Sie die auftretenden Parameter k und d im gegebenen Kontext!

Abb. 6: Ausschnitt aus der Teil 2-Aufgabe 1 des Haupttermins 2016 Mathematik an AHS vom 10. Mai 2016 (Lösungshäufigkeit 0.53 nach Fuchs (2017, S. 43)) [https://www.matura.gv.at/downloads/download/haupttermin-2015-16-mathematik-ahs].

4. Inhaltliche Anregungen zum Differenzieren im Mathematikunterricht

Differenzierter Unterricht kann zur individuellen Förderung von Schüler:innen im Sinne der formativen Leistungsbewertung beitragen:

> „Die Studie gibt durch ihre empirischen Befunde Hinweise darauf, dass formative Diagnostik eng mit der Gestaltung eines differenzierten Unterrichts verknüpft ist.“

(Schmidt 2020, S. 230). Grob wird in der Literatur beim differenzierten Unterricht zwischen innerer und äußerer Differenzierung unterschieden (Hußmann & Prediger 2007, S. 1). Zum Beispiel eine Aufteilung in Leistungsgruppen entspricht einer äußeren Differenzierung. Innere Differenzierung dagegen spielt sich in einer Lerngruppe ab und erfordert didaktische Strategien, um unterschiedliche Wissensstände, Motivationen, etc. entsprechend zu berücksichtigen. Zwei Herangehensweisen haben sich dabei etabliert: bei der *geschlossenen Differenzierung* wird von der Lehrkraft ein Spektrum an Arbeitsaufträgen (z. B. Aufgaben) angeboten, so dass jedes Mitglied der Klasse die Möglichkeit hat, ein individuelles Programm zu wählen (z. B. Stationenbetrieb). Unterschiedliche schwierigkeitsgenerierende Merkmale für die Erstellung bzw. Analyse von Aufgaben („Standard-Differenzierungsstrategien vieler Lehrkräfte“ nach Prediger (2008)) sind (Hußmann & Prediger 2007, S. 2; vgl. auch Drüke-Noe 2018; Prediger, 2008):

- Art der kognitiven Aktivitäten: z. B. explorieren, Muster und Zusammenhänge entdecken, formulieren, verallgemeinern, begründen, argumentieren
- technische Kompliziertheit der Ausführung des Lösungsplanes: Wie groß und technisch kompliziert ist der Rechenaufwand (z. B. Größe der Nenner)?
- Komplexitätsgrad: Wie übersichtlich ist die Situation und wie vielschrittig der Lösungsweg?
- sprachliche Komplexität der Aufgabenstellung: Welche Hürden im Textverständnis müssen überwunden werden?

- Grad der Formalisierung der Aufgabenstellung und der geforderten Lösung: Erfordert die Aufgabe formale Schreibweisen? Wie vertraut sind diese?
- Vorstrukturiertheit bzw. Offenheit der Lösung: Inwieweit ist durch die Enge der Aufgabenstellung bereits alle Vorstrukturierungsarbeit geleistet?
- Bekanntheitsgrad der Mittel: abhängig von Positionierung im Lernprozess

Allgemein geht es um unterrichtliche Strategien, die darauf ausgelegt sind, der Unterschiedlichkeit der Lernenden durch geeignete Lernarrangements gerecht zu werden, um eine optimale Förderung aller Schüler:innen auf deren individuellen Niveaus zu erreichen. Differenzierung hat also nicht zum Ziel, aus einer heterogenen Gruppe eine möglichst homogene Gruppe zu machen, sondern allen Jugendlichen die Möglichkeit zu eröffnen, sich ihren Voraussetzungen entsprechend bestmöglich zu entwickeln (Bruder & Reibold 2012, Abschnitt 2): Abbildung 7. Dies ist selbstredend eine enorm hohe Anforderung an Unterricht und kann die „Leistungsschere weiter auseinanderklaffen“ (Hußmann & Prediger 2007, S. 2) lassen.

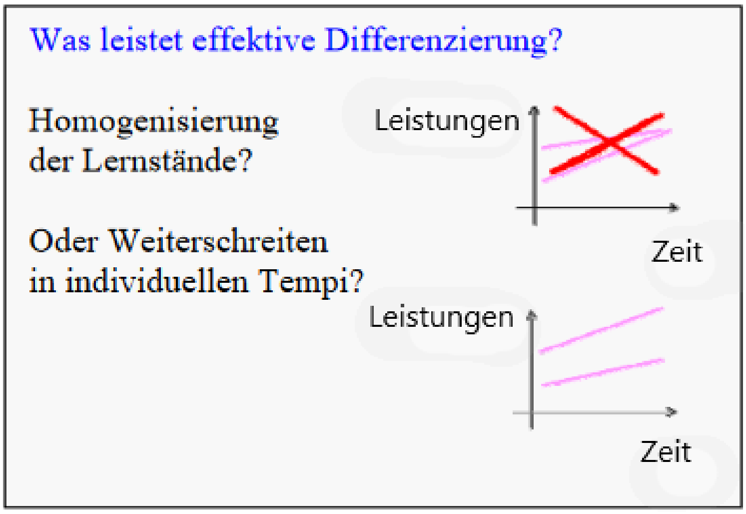


Abb. 7: [http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/07-PM-H17-Hussmann-Prediger-Differenzieren-Webfassung.pdf] (adaptiert).

Als Nachteil der geschlossenen Differenzierung wird der große Arbeitsaufwand für die Lehrkraft beim Erstellen der Aufgaben genannt, und als Vorteil die Möglichkeit, klare Erwartungshorizonte festzusetzen (Prediger 2008).

Zum Explorieren, Muster und Zusammenhänge Entdecken und Verallgemeinern eine Aufgabe: Finde möglichst viele Stammbrüche, deren Summe wieder ein Stammbruch ist! Das Beispiel $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ist leicht durchschaubar und kann zu $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$ für eine natürliche Zahl $n>1$ verallgemeinert werden. Damit steigt natürlich auch der Grad der Formalisierung. Die Rechnung $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ gibt schon mehr zu denken – vor allem: wie kommt man darauf? Die Subtraktion $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$ klärt auf (die Idee stammt von der Betrachtung einer Teleskopsumme). Last but not least eine weitere Steigerung der Schwierigkeit: $\frac{1}{6}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$. Der Ansatz $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}$ führt auf die Bedingung $a\cdot b=n^2$. Dabei sind a, b und n natürliche Zahlen größer null. Für jedes n zieht die Festsetzung $b=1$ die Lösung $a=n^2$ nach sich. Im Falle von $n=6$ gibt es auch andere zulässige Belegungen für a und b: $n^2=6^2=36=9\cdot 4$, also zum Beispiel $a=9$ und $b=4$. Die drei Lösungen zeigen unterschiedliche Komplexitätsgrade der Lösungswege. Diese Aufgabe kann auch als ein Beitrag zum Problemlösen im Mathematikunterricht im Handlungsbereich *Darstellen, Modellbilden* und in den Inhaltsbereichen *Zahlen und Maße* und *Variable, funktionale Abhängigkeiten* angesehen werden. Im Kompetenzmodell des neuen

Lehrplans Mathematik für die Sekundarstufe 1 [https://www.paedagogikpaket.at/massnahmen/lehrplaene-neu/materialien-zu-den-unterrichtsgegenst%C3%A4nden.html] heißt es dazu auf S. 2 (Hervorhebung im Original):

> **„Problemlösen** meint das Bearbeiten innermathematischer Aufgabenstellungen, die für Schülerinnen und Schüler keine Routineaufgaben sind, insbesondere, wenn ihnen (noch) kein passendes Lösungsverfahren bekannt ist."

Abbildung 8 zeigt bildhaft eine „Barriere", die individuell vorhanden sein kann bei einer gegebenen Problemlöseaufgabe oder eben nicht (Bruder & Collet 2011, S. 11). Sie muss jedenfalls überwunden werden, um zu einer Lösung zu gelangen. Kennt man den „Trick", so ist jede Problemlöseaufgabe keine mehr.

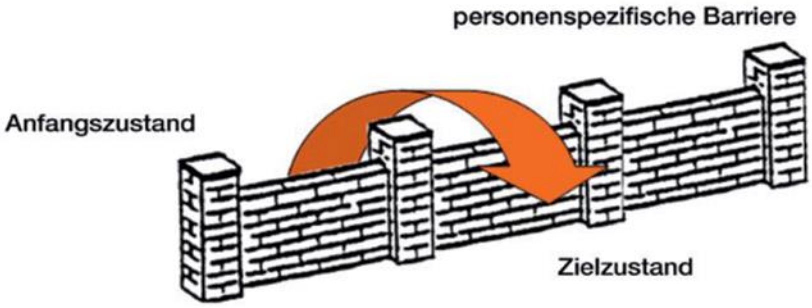


Abb. 8: [https://epub.jku.at/obvulihs/content/titleinfo/2751436/full.pdf].

In Posamentier & Krulik (2008, p. 20) finden wir:

> "The sum of two numbers is 12, and the product of the same two numbers is 4. Find the sum of the reciprocals of the two numbers."

Der Trick ist hier gleich $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{x\cdot y}=\frac{12}{4}=3$ auszurechnen, und nicht das (nichtlineare) Gleichungssystem $\begin{matrix} x+y=12 \\ x\cdot y=4 \end{matrix}$ anzusetzen, welches nicht reelle Lösungen *x* und *y* mit sich bringt.

Unterschiedliche Grade der Formalisierung zeigen Abbildung 9 (Höhensatz im rechtwinkeligen Dreieck) und die Rechnung

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\frac{1}{4}\cdot(a^2+2ab+b^2)-ab=\frac{1}{4}\cdot(a^2-2ab+b^2)=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geq 0$$

für einen Beweis der Mittelungleichung $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ für positive reelle Zahlen a und b. Bei beiden Zugängen „sieht" man: Gleichheit ist genau dann der Fall, wenn $a=b$ gilt.

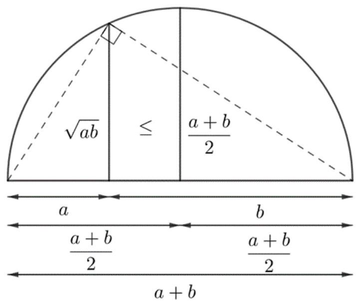


Abb. 9: Von Kmhkmh - Eigenes Werk, CC-BY 4.0, [https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=83943038].

Im Kompetenzmodell des neuen Lehrplans Mathematik für die Sekundarstufe 1 heißt es dazu auf S. 2 (Hervorhebung im Original):

> „**Begründen** meint das Anführen von Argumenten bzw. das Bilden von Argumentationsketten, um eine Vermutung bzw. Behauptung zu bestätigen oder zu widerlegen.“

Es werden bei dieser Aufgabe also der Handlungsbereich *Argumentieren, Begründen* und die Inhaltsbereiche *Variable, funktionale Abhängigkeiten* bzw. *Geometrische Figuren und Körper* angesprochen.

Ein letztes Beispiel zur geschlossenen Differenzierung zeigt unterschiedliche sprachliche Komplexitäten: Abbildung 10 aus Plath (2020, S. 249).

hohe linguistische Komplexität	Bei einem Spendenlauf der Santander Bank nehmen 4000 Schüler, für die jeweils ein Betrag von 10 Euro gespendet wird, und 1200 Erwachsene, für die jeweils 5 Euro gespendet werden, teil. Die Teilnahmegebühr, welche zur Hälfte für die Verpflegung der Teilnehmer verwendet und zur anderen Hälfte ebenfalls in die Spendensumme einfließt, beträgt für Schüler 6 Euro und für Erwachsene 12 Euro. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.	**Kilometer für den guten Zweck** 04.05.2015, Westdeutsche Zeitung Beim Spendenlauf, welcher von der Santander Consumer Bank und der Stadt Mönchengladbach organisiert wird, nimmt auch Joey Kelly teil. Joey, der ehemals Musiker war und jetzt Extremsportler ist, gerät richtig ins Schwärmen und sagt: „Ich habe schon an vielen Läufen teilgenommen, aber der Spendenlauf in Mönchengladbach ist nicht nur einer der größten in Deutschland, sondern einer der bestorganisierten in Europa, sodass ich es kaum erwarten kann.“ Joey Kelly, der schon in den vergangenen Jahren das Aushängeschild des Laufs war, wird am Sonntag, den 14. Juni, nicht nur Medaillen an die besten Läufer verteilen, sondern auch selbst die Laufschuhe schnüren, um mit 4000 sportbegeisterten Schülern sowie 1200 erwachsenen Läufern die Stadt unsicher zu machen. Während Grundschüler 1,3 Kilometer laufen, können auch Strecken von 5 Kilometern oder 10 Kilometern absolviert werden. Nach dem Start der Grundschüler um 10:30 Uhr, ertönt der Startschuss für den Jedermann-Lauf über fünf Kilometer und den Hauptlauf, welcher von Oberbürgermeister und Schirmherr Hans Wilhelm Reiners abgegeben wird, erst nachmittags. Start- und Zielpunkt ist die Santander Bank am gleichnamigen Platz. Abgerissen werden die Kilometer jedoch nicht nur für eine persönliche Bestzeit, vielmehr beträgt der Spendenbetrag, den die Santander Bank einem guten Zweck widmet, pro teilnehmendem Schüler 10 Euro und für jeden anderen Teilnehmer 5 Euro. Die Teilnahmegebühr, welche zur Hälfte für die Verpflegung der Teilnehmer verwendet wird und zur anderen Hälfte ebenfalls in die Spendensumme einfließt, beträgt für Erwachsene 12 Euro und für Schüler 6 Euro. Im vergangenen Jahr, als 4800 Schüler mitliefen, kamen so über 60.000 Euro zusammen. Auch das Rahmenprogramm abseits der Strecke, bestehend aus einer Hüpfburg, Kinderschminken sowie zahlreichen Verkaufsständen mit verschiedenen Leckereien, lockt viele Besucher an. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.
niedrige linguistische Komplexität	Die Santander Bank veranstaltet einen Spendenlauf für einen guten Zweck. Sie spendet für jeden der 4000 teilnehmenden Schüler 10 Euro. Für jeden der 1200 teilnehmenden Erwachsenen spendet sie 5 Euro. Schüler zahlen für die Teilnahme 6 Euro. Erwachsene zahlen 12 Euro. Die Hälfte dieser Gelder wird für die Verpflegung der Läufer verwendet. Den Rest spendet die Santander Bank ebenfalls. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.	**Kilometer für den guten Zweck** 04.05.2015, Westdeutsche Zeitung Der Spendenlauf in Mönchengladbach wird von der Santander Consumer Bank und der Stadt organisiert. An dem Lauf nimmt auch Joey Kelly teil. Der ehemalige Musiker ist inzwischen Extremsportler. Er gerät richtig ins Schwärmen und sagt: „Ich habe schon an vielen Läufen teilgenommen. Der Spendenlauf in Mönchengladbach ist nicht nur einer der größten in Deutschland. Er ist auch einer der bestorganisierten in Europa. Ich kann es kaum erwarten“. Wie schon in den vergangenen Jahren ist er das Aushängeschild des Santander-Spendenlaufs. Am Sonntag, den 14. Juni, wird Joey Kelly die Medaillen an die besten Läufer verteilen. Außerdem wird er selber teilnehmen. Mit ihm laufen 4000 sportbegeisterte Schüler und 1200 erwachsene Läufer. Insgesamt können die Läufer drei verschiedene Strecken absolvieren. Die Grundschüler laufen 1,3 Kilometer. Alle anderen können 5 oder 10 Kilometer laufen.Die Grundschüler starten ihren Lauf um 10:30 Uhr. Der Jedermann-Lauf über 5 Kilometer und der 10-Kilometer Hauptlauf starten erst nachmittags. Oberbürgermeister Hans Wilhelm Reiners gibt hierbei das Zeichen für den Start. Er ist zusätzlich Schirmherr des Spendenlaufs. Alle Läufer starten und enden an der Santander Bank am gleichnamigen Platz. Die Läufer laufen jedoch nicht nur für eine persönliche Bestzeit. Die Santander Bank spendet pro Schüler 10 Euro für einen guten Zweck. Für jeden anderen Teilnehmer spendet sie 5 Euro. Erwachsene zahlen für die Teilnahme 12 Euro. Schüler zahlen 6 Euro. Die Hälfte dieser Gelder wird für die Verpflegung der Läufer verwendet.Den Rest spendet die Santander Bank ebenfalls. Im vergangenen Jahr liefen 4800 Schüler bei dem Lauf mit. Es kamen über 60.000 Euro Spenden zusammen. Auch abseits der Strecke wird den Zuschauern viel geboten. Zahlreiche Stände verkaufen verschiedene Leckereien, schminken Kinder und bieten eine Hüpfburg an. Wie hoch sind die diesjährigen Spenden? Notiere deinen Weg zur Lösung.
	niedrige situationale Komplexität (Textaufgaben)	*hohe situationale Komplexität (Zeitungsartikelaufgaben)*

Abb. 10: Ein Thema unterschiedlich sprachlich dargestellt (Plath 2020, S. 249).

Sogenannte selbstdifferenzierende Aufgaben sind das Herzstück der *offenen Differenzierung*. Sie sind so konzipiert, dass der:die Lernende selbst entscheiden kann, auf welchem Niveau und in welchem Umfang er:sie die Aufgabe bearbeitet. Dabei arbeiten die Lernenden durchgehend an denselben Fragen. Eine Herausforderung für die Lehrenden besteht dabei darin, die Lernenden anzuhalten, tatsächlich auf ihrem Niveau zu arbeiten (Hußmann & Prediger 2007, S. 2).

Ein reichhaltiges Aufgabenfeld mit mannigfachen (offenen) Differenzierungsmöglichkeiten ist zum Beispiel die Erstellung von Füllgraphen bzw. -funktionen. Sie beschreiben die zeitliche Entwicklung der Füllhöhe in einem bestimmten Gefäß, wenn dieses mit konstanter Füllgeschwindigkeit (d. h. das pro Zeiteinheit hinzukommende Flüssigkeitsvolumen ist konstant) mit einer Flüssigkeit (z. B. Wasser) befüllt wird.

> „Füllgraphen werden oft genutzt, um Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen zu erarbeiten und zu festigen. Dabei vernetzen sie räumliche Vorstellungen mit graphischen Darstellungen über funktionale Zusammenhänge.“

(Lambert & Hilgers o. J.). Grundvorstellungen funktionalen Denkens sind der

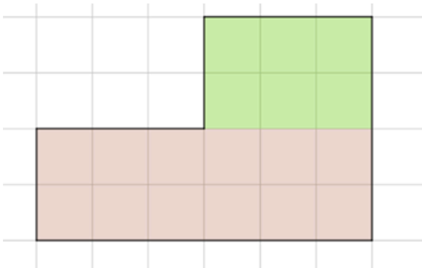
- Zuordnungsaspekt: jedem Wert eines Bereiches wird ein bestimmter Wert zugeordnet;
- Kovariationsaspekt: gemeinsames Änderungsverhalten zweier Werte;
- Objektaspekt: Operationen wie z. B. den Graphen verschieben (Barzel 2009, S. 13).

Das Zitat

> „Die Chance, Mathematik mit Erfahrungen zu verbinden, sollte man […] nutzen, denn Erkenntnisse, die aus einem enaktiven Erleben erwachsen, bleiben auch nachhaltiger im Gedächtnis.“

(Barzel 2009, S. 10) motiviert einen haptischen Zugang zur Thematik: es werden Zeiten und (zugehörige) Füllstände gemessen und so der Füllgraph punktweise konstruiert (Zuordnungsaspekt). (Bei komplizierten Gefäßformen ist das oft sogar die einzige Möglichkeit.)

Einfache (rotationssymmetrische) Gefäßformen wie Zylinder lassen das Konstruieren eines Füllgraphen „als Ganzes“ zu (Objektaspekt). Abbildung 11 zeigt zwei Beispiele aus Lambert & Hilgers (o. J.). Die linke Figur in Abbildung 11 zeigt den vertikalen Querschnitt zweier Zylinder, wobei der Durchmesser der Grundfläche des oberen Zylinders halb so groß ist wie jener des unteren. Sie sind zudem gleich hoch. Daraus können wir folgern, dass die Füllzeit des oberen Zylinders ein Viertel der Füllzeit des unteren beträgt. Aufgrund der Geometrie von Zylindern können wir außerdem schließen, dass der Füllgraph dem Graphen einer linearen Funktion entspricht: in gleichen Zeiten werden gleiche Flüssigkeitsvolumina zugeführt, da sich die Querschnittsfläche eines Zylinders nicht ändert, muss dies Hand in Hand mit konstanten Höhenzuwächsen einhergehen. Auf halber Höhe muss der Füllgraph einen Knick aufweisen, die Füllhöhenzunahme (und damit die Steigung des Füllgraphen) vervierfacht sich „schlagartig“.



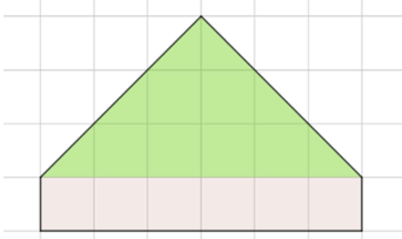


Abb. 11: Zwei zu füllende Gefäße bestehend aus Zylinder und Kegel.

Ganz anders ist die Situation bei der rechten Figur in Abbildung 11. Zuerst stellen wir im Vergleich zur linken Figur fest, dass der Zylinder rechts halb so groß ist wie der Basiszylinder links in Abbildung 11.

Das bedeutet, dass die Füllzeit des linken unteren Zylinders doppelt so lang ist wie die Füllzeit des rechten unteren. Nun zum aufgesetzten Kegel: Er hat die dreifache Höhe des Basiszylinders, daher das gleiche Volumen wie er und damit dieselbe Füllzeit. Der Übergang von Zylinder zu Kegel weist keinen Knick auf, weil die Abnahme des Kegeldurchmessers mit der Höhe stetig verläuft. Denken wir uns den Kegel bei halber Höhe durchgeschnitten, dann hat der obere Kegel ein Achtel des Volumens des ganzen Kegels. Das hat zur Folge, dass das Befüllen bis zur halben Kegelhöhe $\frac{7}{8}$ der Füllzeit für den ganzen Kegel benötigt. An der Spitze des Kegels wird das zu füllende Volumen „unendlich klein“, das heißt der Füllgraph wird am Ende eine senkrechte Steigung besitzen.

Der Kovariationsaspekt kommt bei der analytischen Behandlung des Themas zum Tragen, zum Beispiel beim Befüllen eines Kegelstumpfes. Dieser habe die Höhe H und die beiden Radien r_1 des Basiskreises und r_2 der Deckfläche. Es gilt $r_1 < r_2$. Die Volumsformel des Kegelstumpfes ist $V = \frac{H\pi}{3} \cdot (r_1{}^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2{}^2)$. Eine elementare Herleitung dieser Formel für die Sekundarstufe 1 findet sich in Sergi & Götz (2023). Das eingefüllte Flüssigkeitsvolumen hat natürlich dieselbe Form, allerdings ändert sich der Radius r der Deckfläche linear mit der Füllhöhe h: $r(h) = \frac{r_2 - r_1}{H} \cdot h + r_1$ für $0 \leq h \leq H$. Damit ist $V(h) = \frac{h\pi}{3} \cdot \left(r_1{}^2 + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \cdot h + r_1\right) + \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \cdot h + r_1\right)^2\right)$ das Füllvolumen in Abhängigkeit der Füllhöhe (Zuordnungsaspekt). Interessant ist aber die Umkehrfunktion h, sie kann mittels eines CAS bestimmt werden: Abbildung 12. Im Nenner steht ein Ausdruck, der negativ ist. Daher muss auch der Zähler negativ sein. Händisches Umformen liefert schließlich $h(V) = \frac{H}{r_2 - r_1} \cdot \left(\sqrt[3]{r_1^3 + \frac{3V(r_2 - r_1)}{\pi H}} - r_1\right)$.

Bei komplexen Umformungen kann also das Zusammenspiel von Technologie und Erkennen von Termstrukturen fruchtbar und erkenntnisbringend sein. Wegen $V = v_f \cdot t$, wobei v_f die konstante Fließgeschwindigkeit ist, kann die zeitabhängige Höhenfunktion $t \rightarrow h(t)$ leicht aus $V \rightarrow h(V)$ gewonnen werden (Sergi 2022, Abschnitt 6.6). Einen Ausschnitt aus einem dazu passenden GeoGebra-Applet zeigt Abbildung 13.

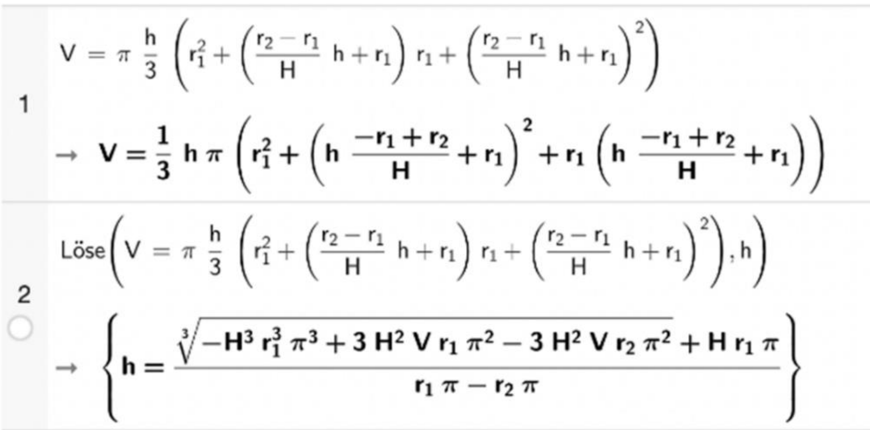


Abb. 12: Die Lösung des CAS.

Im Sinne des Spiralprinzips kann diese Aufgabe auch mit Hilfe der Integralrechnung (Volumen von Rotationskörpern) behandelt werden (Sergi 2022, S. 77). Für $r_1 = 0$ mutiert der zu füllende Stumpf zu einem auf der Spitze stehenden Kegel usw. usf.

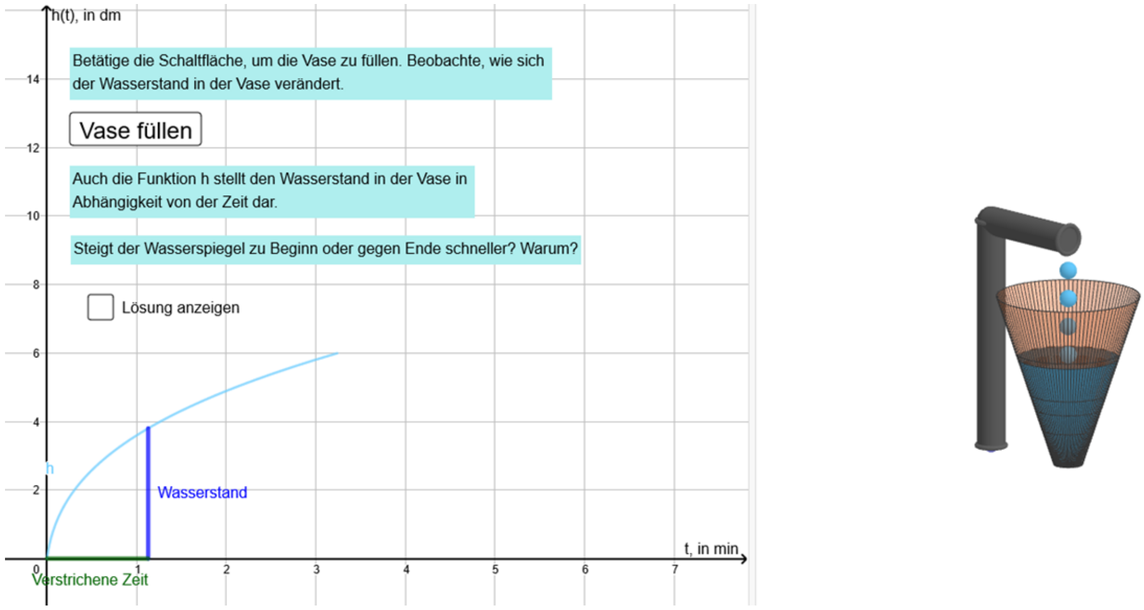


Abb. 13: GeoGebra-Applet von Laura Sergi [https://www.geogebra.org/m/e2crshz5].

„Blütenaufgaben" stellen eine weitere Möglichkeit innerer Differenzierung im Mathematikunterricht dar. Folgende Qualitätsanforderungen werden an sie gestellt:

- „Die Blütenaufgabe hat einen in sich geschlossenen Kontextbezug.
- Ein Erwartungshorizont muss erstellt werden.
- Die ersten Teilaufgaben sind Grund- und Umkehraufgaben […].
- Der Kontext wird unter verschiedenen Blickwinkeln betrachtet und schrittweise langsam variiert […].
- Eine komplette Öffnung ist nicht zwingend erforderlich.
- Der Ausführungsaufwand der Teilaufgaben darf nicht zu hoch sein."

[https://wwwdid.mathematik.tu-darmstadt.de/makos/downloads/Steckbrief_Bluetenaufgaben.pdf]. Ein Beispiel dazu:

„Jeansgrößen werden in inch angegeben und nicht in cm. Du musst wissen: 1 inch entspricht 2,54 cm.

a) Die erste Zahl gibt den Taillenumfang (W) an. […] Wie viel cm beträgt der Taillenumfang bei der Größe W 30?
b) Lena sagt: „Ich habe Größe 25." Ihr Maßband zeigt 63,5 cm. Hat sie richtig gerechnet?
c) Du jobbst in einem Laden. Lege eine Tabelle an, um schnell die richtige Größe zu finden. Runde dazu die Ergebnisse auf ganze cm.
d) Was müsstest du rechnen, wenn du die Größe in cm weißt und die Größe in inch brauchst?
e) Peter behauptet: Wenn ich eine Zahl mit einer Dezimalzahl multipliziere, ist das Produkt immer größer als die ursprüngliche Zahl."

(ebd., Hervorhebung im Original, Nummerierung angepasst).

Ein (Zwischen-)Resümee lautet: Eine Herausforderung stellt sich dabei, die Lernenden zu motivieren, ihrem Niveau entsprechend zu arbeiten (etwa bei einem Aufgabenset wie in den Abbildungen 1 bis 3 nicht immer nur die einfachen Aufgaben auszuwählen). Andererseits kann es natürlich auch passieren, dass leistungsschwache Schüler:innen die Offenheit nützen und sich auch einmal an einer aufwendigeren Aufgabenstellung versuchen. Bruder & Reibold (2012, S. 74 f., Hervorhebungen im Original) nennen drei didaktische Kernelemente für offene Differenzierung:

- „Unterstützung der *Selbstregulation* (Zielklarheit und Zielbildung, Selbsteinschätzung),
- Differenzierte *Ausgangsniveausicherung* (Basiswissen und -können wachhalten und entstandene Lücken füllen),

- Differenzierte *kognitive Aktivierung* (bei der Erkenntnisgewinnung und beim Festigen)."

Insgesamt ist eine Balance zwischen geschlossener und offener Differenzierung anzustreben, die sowohl inhaltlich als auch methodisch (siehe nächster Abschnitt) im Zuge der Unterrichtsplanung begründet werden kann: Eine Kombination beider Herangehensweisen der inneren Differenzierung kann abhängig von der jeweiligen Lernsituation sinnvoll sein (Hußmann & Prediger 2007, S. 2).

5. Methodische Hinweise

Es bedarf diagnostischer Fähigkeiten der Lehrkraft, um die individuellen Lernvoraussetzungen aufzuspüren und um differenzierende, passende Aufgabenstellungen zu stellen (Leuders & Prediger 2012). Auf diese Weise kann an Vorerfahrungen der Schüler:innen angeknüpft werden. Vertrautheit mit statistischen Diagrammen aus den Medien zum Beispiel kann der Verknüpfung des Inhaltsbereichs „Statistische Darstellungen und Kenngrößen" mit dem Handlungsbereich „Interpretieren" förderlich sein (Abbildung 14).

Abb. 14: DerStandard online vom 13.04.2022 [https://www.derstandard.at/story/2000134884018/von-40-bis-175-prozent-wie-der-gaspreisanstieg-haushalte-unterschiedlich].

Unterschiedliches Vorwissen zu einem bestimmten Thema in einer Klasse kann zu verschiedenen Unterrichtsmethoden innerhalb dieser Klasse nach einer Gruppeneinteilung führen. Die Aptitude Treatment Interaction-Forschung beschäftigt sich allgemein damit, für ausgewählte Schüler:innenmerkmale die jeweils passende Unterrichtsmethode zu finden, um bestimmte Lernziele zu erreichen. Aptitude Treatment Interaction bedeutet dabei in etwa „Fähigkeits-Lehrmethoden-Zusammenhang". Zum Beispiel erhalten Schüler:innen mit geringerem (unzureichendem) Vorwissen Lernmaterial A (z. B. ausgearbeitete Lösungsbeispiele), Schüler:innen mit mehr relevantem Vorwissen erhalten Lernmaterial B (z. B. Problemlöseaufgaben). Ist der angenommene Zusammenhang zwischen Lernvoraussetzung und Lernangebot tatsächlich der Fall, so erzielen die Schüler:innen mit den für sie jeweils passend zugeteilten Lernmaterialien (A oder B) bessere Lernerfolge als ohne diese Differenzierung: Abbildung 15 (Friesen et al. 2022, S. 6) .

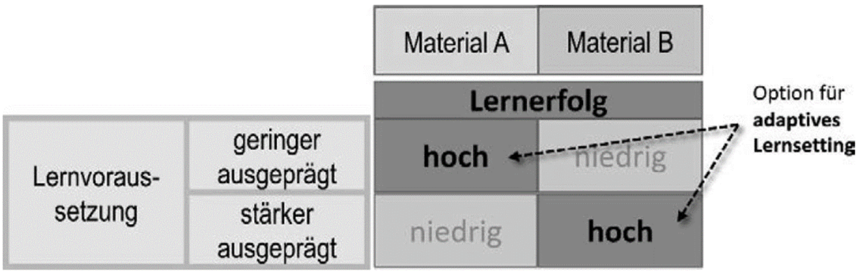


Abb. 15: An Fähigkeiten von Schüler:innen angepasste Lehrmethoden (Friesen et al. 2022, S. 6).

Die personelle Ausformung des Differenzierens innerhalb der Klasse geschieht durch flexibles Gruppieren, welches nur in bestimmten Unterrichtsphasen durchgeführt wird: Abbildung 16 (Friesen et al. 2022, S. 13). Der Einstieg orientiert sich an der thematischen Lerneinheit und die dafür formulierten Lernziele, für die unterschiedliche Lernvoraussetzungen relevant sein können. Sind die erwarteten, auf Erfahrung basierenden oder festgestellten (Vortest) Unterschiede in den Lernvoraussetzungen sehr groß, so sollte das vorgesehene Lernmaterial für verschieden ausgeprägte Voraussetzungen angepasst werden, so dass jede Lerngruppe adäquates Lernmaterial zur Verfügung hat. Zum Beispiel wird die Lerngruppe mit den schwächeren Voraussetzungen mit zusätzlichen Hilfestellungen oder Strukturierungen ausgestattet, die bei der stärkeren Gruppe entfallen (Friesen et al. 2022, S. 7). Für das Systematisieren und Sichern des Unterrichtsertrages wird die Gruppeneinteilung innerhalb der Klasse wieder aufgehoben, ebenso in Phasen des Prüfens und (gemeinsamen) Reflektierens (Abbildung 16).

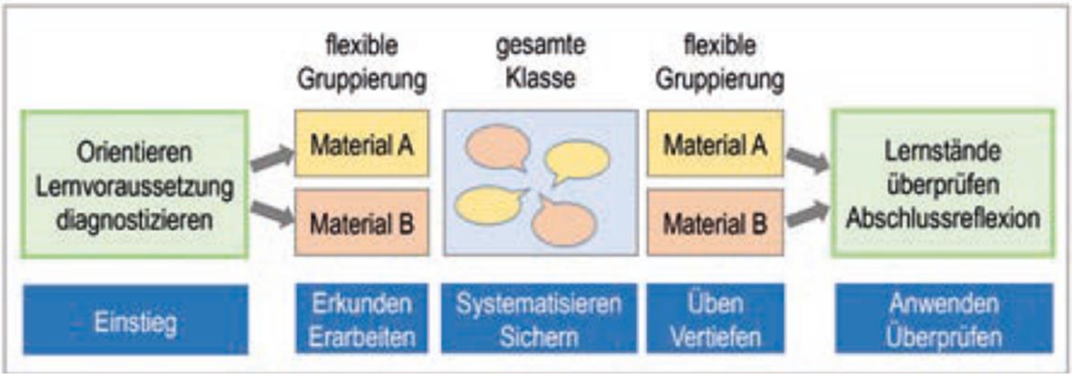


Abb. 16: Flexibles Gruppieren in bestimmten Unterrichtsphasen (Friesen et al. 2022, S. 13).

Für die Planung eines Stundenaufbaus gemäß Abbildung 16 müssen folgende Fragen beatwortet werden (Friesen et al. 2022, S. 13 f.):

1. „Was ist das gemeinsame Lernziel der Unterrichtseinheit? […]
2. Welche Lernvoraussetzung ist für das Erreichen des Lernziels relevant?“
   a. fachlich
   b. z. B. Selbstregulation beim offenen, problemorientierten Arbeiten
3. „Wie wird die relevante Lernvoraussetzung erfasst? […]
4. Wie wird das Lernmaterial gestaltet? […]
5. In welchen Unterrichtsphasen wird flexibel gruppiert?“

Bleiben wir bei dem Beispiel Vorwissen (gemeint sind Kompetenzen bezogen auf Wissen und Können) als eine in einer Klasse unterschiedlich ausgeprägte Lernvoraussetzung für ein neues Thema, dazu kommt noch aufgrund methodischer Planung (geschlossene Differenzierung) die mehr oder minder vorhandene Fähigkeit zur Selbstregulation (Punkt 2. b. oben). Um diese individuell und praxisnah zu erfassen, schlagen Lacher et al. (2022, S. 46) folgende Skala vor: Abbildung 17. Jedes Item wird mit Punkten bewertet: 0 – stimmt gar nicht, 1 – stimmt eher nicht, 2 – stimmt eher, 3 – stimmt vollkommen. Die Punktzahlen der fünf Items werden addiert. Als ein Maß für das Vorwissen kann die letzte Zeugnisnote in Mathematik für jede:n Schüler:in ins Auge gefasst werden. Nun bildet man für beide Faktoren eine Rangliste in der Klasse (eventuell bzw. wahrscheinlich mit vielen Bindungen), dann werden die beiden Rangpunkte für jede:n Schüler:in addiert und daraus eine Gesamtrangliste erstellt. Diese definiert eine Zweiteilung der Klasse (ebd.).

Nach Lacher et al. (2022, S. 48) geben wir folgende Beispielaufgabe:

> „Wie viele Stücke sollte eine rechteckige Schokolade haben, damit du sie auf möglichst viele verschiedene Anzahlen von Personen gerecht aufteilen kannst?“

Item	Beschreibung
SR1	Das Kind überlegt beim Lesen der Aufgabe, welches Vorgehen (Strategie) ihm beim Lösen helfen könnte.
SR2	Das Kind überlegt sich beim Lesen der Aufgabe, was das Ziel der Aufgabe ist.
SR3	Das Kind überlegt sich während des Bearbeitens der Aufgabe, ob es schon nahe an der Lösung ist.
SR4	Wenn das Kind nicht weiterkommt, wechselt es sein Vorgehen (Strategie).
SR5	Am Ende überprüft das Kind, ob seine Lösung stimmen kann.

Abb. 17: Fünf Items zur individuellen Erfassung der Selbstregulationskompetenz von Schüler:innen (Lacher et al. 2022, S. 46).

Für Lernmaterial A können wir zum Beispiel diese Fragen bzw. Aufforderungen als ergänzendes Unterstützungsmaterial ansehen:

> „Überlege dir zuerst …
> … Was ist im Text mit ‚verschiedene Anzahlen von Personen‘ gemeint? […]
> … Mache 5 verschiedene Beispiele. Welche davon sind gute Lösungen und wieso?
> … Verändere die Anzahl [der, Anm. S. G.] Stücke der Schokolade systematisch, z. B. 20, 30 , 40 etc. Was stellst du fest?
> … Stelle eine Vermutung über die Anzahl [der, Anm. S. G.] Stücke auf und überprüfe sie mit verschiedenen Beispielen.“

(ebd.).

Lacher et al. (2022, S. 49) skizzieren dazu einen hypothetischen Lernverlauf (Abbildung 18). Die erste Aufforderung von soeben betrifft die Vorausschau: ist alles klar verständlich? Werden schon Verfahren von früher ins Auge gefasst, um diese Aufgabe zu lösen? Die nächsten beiden Aufforderungen bzw. Fragen zielen auf die Steuerung der eingesetzten Strategie(n) ab. Die letzte Aufforderung dient der Überprüfung der erzielten Ergebnisse und sie kann weiters den Beginn der Reflexion einleiten.

Die beiden Faktoren „Vorwissen“ und „Selbstregulation“ beeinflussen das Lernergebnis bzw. den Lernfortschritt beim selbstständigen Bearbeiten von Aufgaben zum Thema „Teiler und Vielfache“ (vgl. die Beispielaufgabe von eben, die dem Problemlösen zuzuordnen ist) durch Schüler:innen signifikant (Lacher et al. 2022, S. 44 f.). Das Lernergebnis setzt sich dabei aus inhaltlichem Wissen und heuristischen Fähigkeiten zusammen. Letztere wiederum zeigen sich beim Strukturieren und Überprüfen des Lernvorganges (vgl. Abbildung 18), sind also wichtige Elemente der Selbstregulation von Schüler:innen beim Problemlösen. In Abbildung 19 sind die quantitativen Ergebnisse dargestellt. Zur Auswertung wurden robust gerechnete multivariate Regressionsmodelle eingesetzt. Die Breite der Pfeile und angegebenen Zahlen in Abbildung 19 entsprechen den standardisierten Regressionskoeffizienten (ß-Koeffizienten), je breiter der Pfeil, desto größer der Einfluss. Die statistische Signifikanz der Regressionen der

Faktoren werden mit einem Stern ($p < 0.05$) oder zwei Sternen ($p < 0.01$) angegeben. Die Änderungen in Wissen und Heuristik wurden mit Hilfe eines Vor- und eines Nachtests gemessen (ebd.).

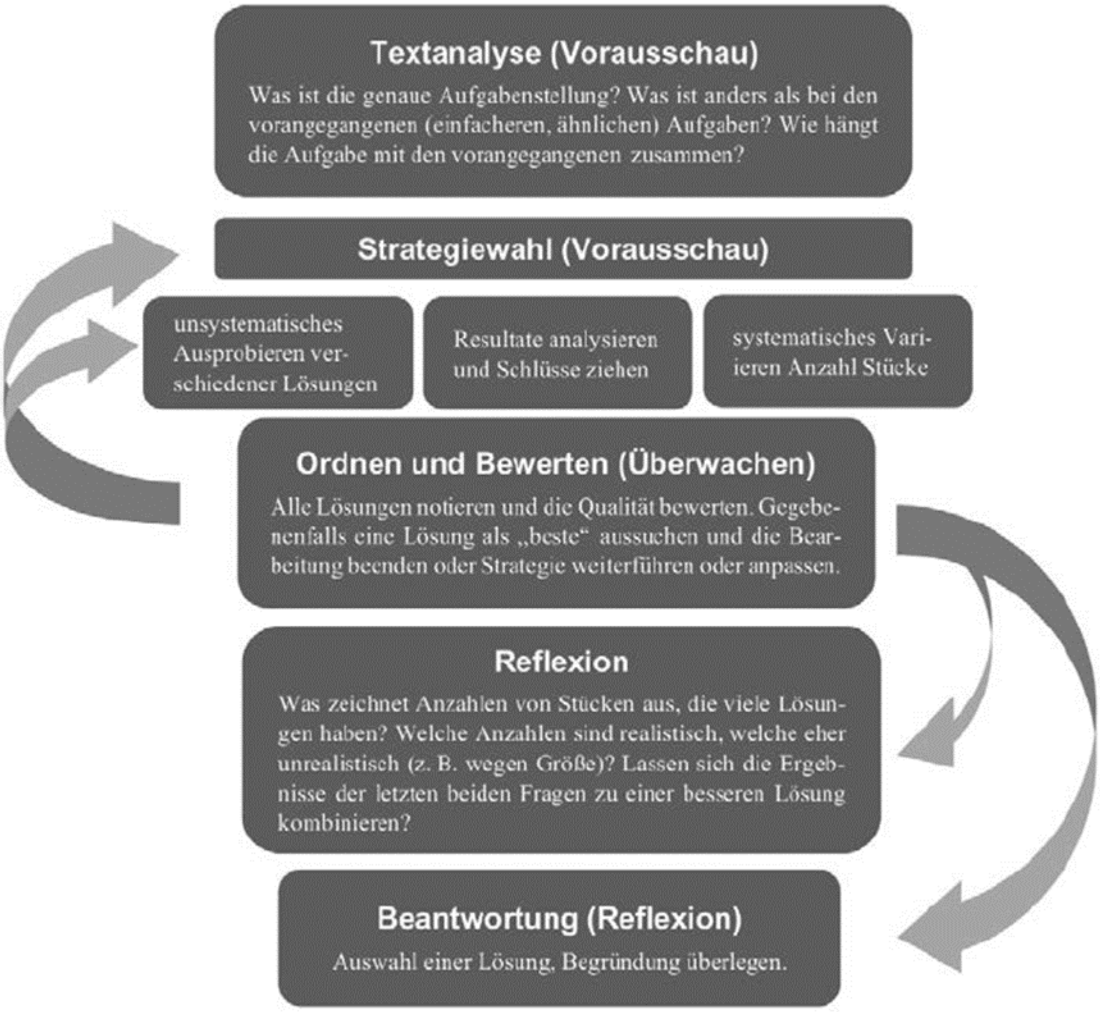


Abb. 18: Hypothetischer Lernverlauf zur „Schokoladenaufgabe“ (Lacher et al. 2022, S. 49).

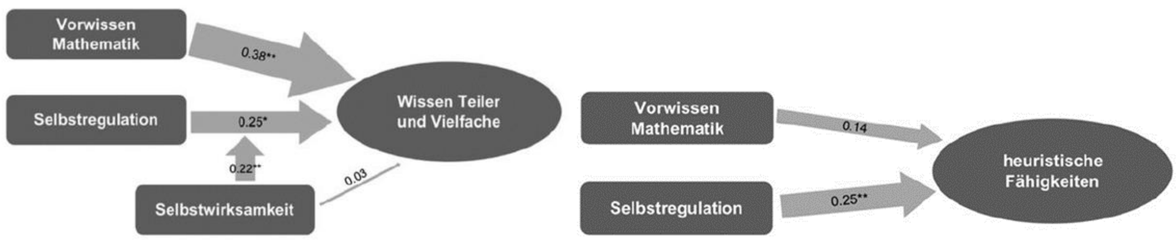


Abb. 19: Einfluss der Faktoren „Vorwissen“ und „Selbstregulation“ auf Wissenszuwachs und heuristische Fortschritte, Angabe der Regressionskoeffizienten (* signifikant, ** hochsignifikant) (Lacher et al. 2022, S. 45).

Reflexionsanlässe schaffen ist eine andere Möglichkeit, Differenzierung im Unterricht anzubieten: Kreis- oder Ringdiagramme etwa eignen sich nicht zur Darstellung von Merkmalen mit vielen Ausprägungen, werden aber sehr wohl publiziert (Abbildung 20). Als mögliche Alternative bieten sich (auf Basis realer Daten selbst erstellte) Balkendiagramme an (Abbildung 21). Dieses Beispiel spricht also den Inhaltsbereich „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ und den Handlungsbereich „Darstellen, Modellbilden“ an.

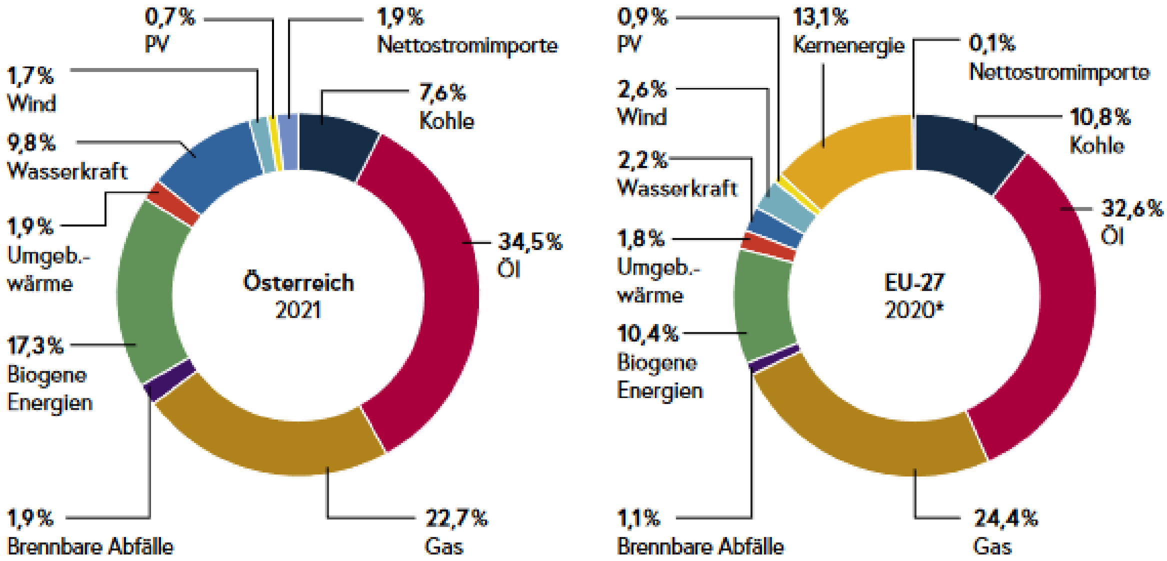


Abb. 20: Bruttoinlandsverbrauch von Energie im Vergleich Österreich – EU [https://www.bmk.gv.at/themen/energie/publikationen/zahlen.html].

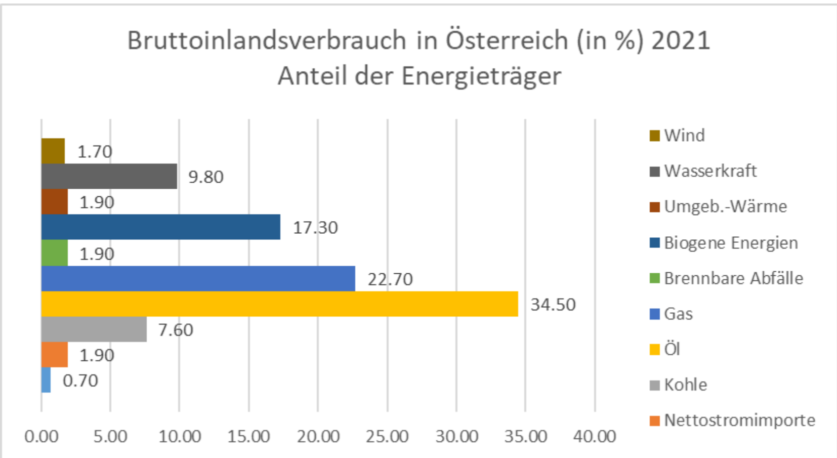


Abb. 21: Balkendiagramm als Alternative zum Ringdiagramm bei vielen Merkmalsausprägungen.

Für den Inhaltsbereich „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“ zum Beispiel reicht das Handlungsspektrum vom Darstellen kleiner, vorgegebener Datenmengen („Darstellen, Modellbilden“) bis zum Vergleichen konkurrierender Diagrammtypen in komplexen statistischen Situationen („Argumentieren, Begründen“). Das ergibt eine breite Differenzierungspalette.

Beim Erkunden neuer Themen sind gestufte Impulse der Lehrenden eine Methode, Elemente der Differenzierung in den Unterricht einfließen zu lassen. Ein Beispiel ist das (Unter-)Suchen der Möglichkeiten, geometrische Figuren in der Ebene so zu transformieren, dass sie deckungsgleich bleiben. Abbildung 22 zeigt einen Ausschnitt eines dazu passenden GeoGebra-Applets. Der Inhaltsbereich „Geometrische Figuren und Körper“ und der Handlungsbereich „Rechnen, Operieren“ werden durch gestufte Impulse von „einer Möglichkeit“ zu „mehreren“ bis zu „allen“ miteinander fruchtbar in Beziehung gesetzt (Hußmann & Prediger 2007, S. 3).

Entlang der Behandlung von Teilbarkeitsregeln in den natürlichen Zahlen können

- das Experimentieren mit Beispielen,
- das Untersuchen von Spezialfällen,
- das Finden von Gemeinsamkeiten („Rechnen, Operieren“),
- das Formulieren von Sätzen („Darstellen, Modellbilden“)
- bis zum Begründen derselben („Argumentieren, Begründen“)

Stationen differenzierten Unterrichts sein.

Aufgaben für das Erkunden sollen also so gestaltet bzw. ausgewählt werden, dass vielfältige Lösungswege, alternative Repräsentationen oder Begründungen auf verschiedenen Abstraktionsstufen möglich sind.

Weitere Unterstützungsmaßnahmen für differenzierten Unterricht sind von Seiten der Lehrenden geeignete Lehrimpulse, regelmäßige Aufforderungen zu Zwischenreflexionen (Lerntagebücher) oder das Bereitstellen von vorstellungsunterstützenden Materialien (Leuders & Prediger 2012).

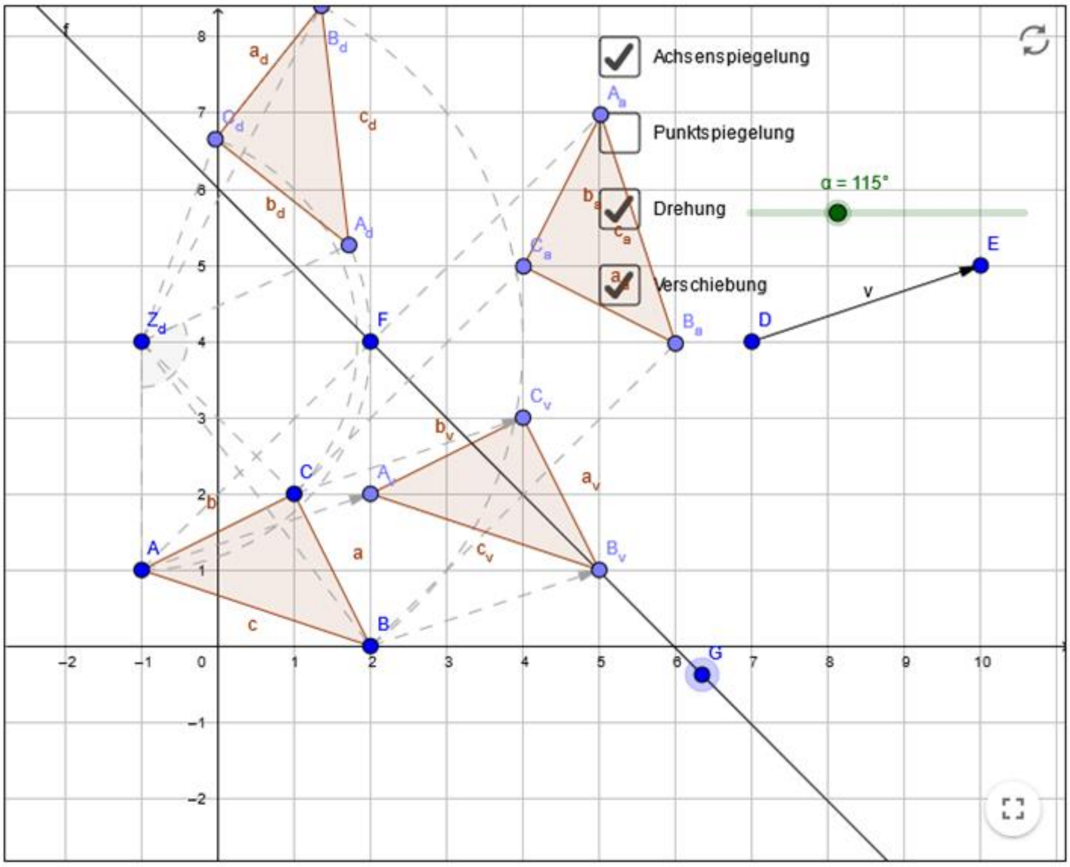


Abb. 22: Kongruenzabbildungen in der Ebene von eckerts [https://www.geogebra.org/m/gPe7wSut].

Nach den Eigenaktivitäten von Schüler:innen sollten nach einem konstruktivistischen Verständnis von Lernen ein Austausch und eine Reflexion der verschiedenen Zugänge, Erfahrungen und Resultate stattfinden. Dazu können zum Beispiel sogenannte Strategiekonferenzen „einberufen“ werden. Strategiekonferenzen dienen dem Austausch verschiedener Zugänge, Erfahrungen und Resultate. Dabei werden individuelle Ideen gesammelt und unterschiedliche Herangehensweisen systematisiert.

Eine Gleichung kann zum Beispiel auf verschiedene Arten gelöst werden:

- durch (systematisches) Probieren,
- durch Anwenden eines Lösungsverfahrens,

- (oder näherungsweise durch Iterieren eines Approximationskalküls)

(„Variable, funktionale Abhängigkeiten“ und „Rechnen, Operieren“).

Stochastische Probleme können durch

- das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten,
- durch kombinatorisches Abzählen von Fällen oder
- durch Simulation

analysiert werden.

Von der Lehrperson wird eine Zielorientierung vorgegeben: auf welcher Stufe

- welche Strategie,
- welcher Inhalt,
- welche Begründung etc.

von den Lernenden erworben werden soll. Dabei ist die Zugänglichkeit für alle unbedingt notwendig: auch für die leistungsschwächeren Schüler:innen muss es möglich sein, den Beiträgen der anderen zu folgen (Leuders & Prediger 2012, Abschnitt 2.3). Eine mögliche Stufung könnte sein:

- eine tragfähige Strategie sicher beherrschen,
- wissen, dass es auch noch andere gibt,
- Beherrschung mehrerer Strategien,
- bewusstes Wählen zwischen Strategien

(Leuders & Prediger 2012, S. 48 f.; Hußmann & Prediger 2007, S. 6).

> „Nachhaltiges konzeptuelles Wissen, das insbesondere die Vorstellungen und Darstellungen umfasst, muss jeweils für alle Niveaus gesichert werden, dagegen ist ausdifferenziertes Abgrenzungswissen (wann kann ich statt diesem Verfahren günstiger ein anderes anwenden?) und weitgreifende Vernetzungen (der Satz ist unter Berücksichtigung der Nebenbedingung x ein Spezialfall von y) eher für die Stärkeren zu konsolidieren.“

(Leuders & Prediger 2012, S. 52).

Das Transferieren von Strategien in neue, nicht vertraute Situationen schließlich stellt den Gipfel mathematischen Handelns im Unterricht dar. Das ist die Herausforderung des Mathematikunterrichts schlechthin! Impulse von Lehrer:innenseite können hierbei differenzierend wirken:

- Untersuche nur einen bestimmten Spezialfall!
- Triff erst Vereinfachungen und rechne dann!
- Selektiere zwischen verschiedenen Fällen!

Dazu kann die Lehrerin bzw. der Lehrer einen Aufgabensatz vorgeben, dessen Items nach Schwierigkeitsgrad geordnet werden sollen. So kann die Leistungsfähigkeit einer einzelnen Person eruiert werden und für die Lehrperson und die Schüler:innen Orientierung geschaffen werden (Hußmann & Prediger 2007, S. 6). Das Formulieren selbsterstellter Aufgaben, die jeweils vom Sitznachbarn bzw. von der Sitznachbarin gelöst werden müssen, ist eine weitere Möglichkeit, das Erwerben dieser Kompetenz in den Mathematikunterricht einfließen zu lassen.

6. Fazit

Die Ausführungen sollen anregen, über Leistungsbeurteilung im schulischen Kontext aber auch in gesellschaftlicher Hinsicht nachzudenken. Formative Leistungsbewertung erweist sich als effektives Instrument zur Förderung der Lernprozesse von Schüler:innen, wenn diese sowohl prozess- als auch produktorientiert eingesetzt wird und kriteriale, ergänzt um individuelle Bezugsnormen in den Vordergrund stellt – der Einsatz von am sozialen Durchschnitt orientierten Messinstrumenten ist aus mehreren Gründen hinterfragenswert. In der LBVO-Novelle des Bildungsministeriums wird unter dem Paradigma der Kompetenzorientierung die „Verankerung einer beurteilungsfreien formativen Leistungsrückmeldung neben der summativen Leistungsbeurteilung, um individuelle Lernprozesse durch zielgerichtete und konstruktive Rückmeldung zu unterstützen“, gefordert [https://www.paedagogikpaket.at/massnahmen/lbvo-novelle.html].

Differenzierende Aufgaben spielen in diesem Sinne eine wesentliche Rolle, setzen aber diagnostische Kompetenz von Lehrkräften einerseits in der Aufgabenauswahl (Inhalts- und Handlungsbereich, Textverständnis, Komplexitätsgrad, Anspruchsniveau, …) und andererseits im Bereich der Lernstandsdiagnose (unter Einbezug einer Potentialabschätzung) voraus. Dazu kommen (weitere) fachdidaktische Kompetenzen wie z. B. die Kenntnis von Fehlvorstellungen oder das Erstellen eines individuellen Förderprogrammes.

Moser Opitz (2022, S. 222) spricht von einem zirkulären Prozess des komplexen Zusammenhangs von diagnostischem und didaktischem Handeln, der durch Urteilsbildung und didaktische Entscheidung verbunden ist. Schmidinger et al. (2015, S. 62 f.) geben diesbezüglich in Anlehnung an William (2013) fünf Schlüsselstrategien für die Umsetzung einer effektiven FLB an:

- Lernziele und Erfolgskriterien mit den Lernenden klären,
- effektive Diskussionen, Aktivitäten und Aufgaben arrangieren, die zu beobachtbaren Lernergebnissen führen,
- Feedback geben, das das Lernen voranbringt,
- Schülerinnen und Schülern ermöglichen, einander als Ressource zu nutzen,
- Schüler:innen als Verantwortliche ihres eigenen Lernens anerkennen.

Literatur

Arnold, K.-H., Lindner-Müller, C. (2009): Leistungsüberprüfungen und -beurteilungen. In: Blömeke, S.; Bohl, T.; Haag, L.; Lang-Wojtasik, G.; Sacher, W. (Hrsg.): *Handbuch Schule*. *Theorie – Organisation – Entwicklung* (S. 323–331). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Barzel, B. (2009): Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe! In: Leuders, T.; Hefendehl-Hebeker, L.; Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Mathemagische Momente* (S. 6–17). Berlin: Cornelsen.

Benischek, I., Hauer-Typpelt, P., Sattlberger, E., Steinlechner-Wallpach, G. (2023): *Mathe 1*. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Bloom, B. S. (1969): Some theoretical issues relating to educational evaluation. In: Tyler, R. W. (Ed.): *Educational evaluation: new roles, new mean* (the 68th yearbook of the National Society for the Study of Education, Part II, pp. 26–50). University of Chicago Press.

Bruder, R., Collet, C. (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.

Bruder, R., Reibold, J. (2012): Erfahrungen mit Elementen offener Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I im niedersächsischen Modellprojekt MABIKOM. In: Lazarides, R.; Ittel, A. (Hrsg.): *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 67–92). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Drüke-Noe, C. (2018): Einfach – mittel – schwierig … Wenn das so einfach wäre: Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades entwickeln. In: *mathematik lehren* 209, 9–12.

Eder, F., Neuweg, G. H., Thonhauser, J. (2009): Leistungsfeststellung und Leistungsbeurteilung. In: Specht, W. (Hrsg.): *Nationaler Bildungsbericht Österreich 2009* (Band 2: Fokussierte Analysen bildungspolitischer Schwerpunktthemen, S. 247–267). Graz: Leykam. Online: https://www.iqs.gv.at/downloads/bildungsberichterstattung/nationaler-bildungsbericht-2009 (Zugriff: 3. 5. 2023).

Friesen, M., Leuders, T., Loibl, K. (2022): Differenzieren im Mathematikunterricht: Forschungsbasiert und praxisrelevant zugleich?! In: *Der Mathematikunterricht* 68(2), 4–17.

Fuchs, C. (2017). *Kompetenzorientierte Analyse von Typ-2-Aufgaben nach dem O-M-A-Modell.* Universität Wien: Diplomarbeit. Online: https://utheses.univie.ac.at/detail/42089# (Zugriff: 3. 5. 2023).

Gruber, K. H. (2020): *Bildungspolitische Glühwürmchen*. DerStandard am 11.1.2020. Online: https://www.derstandard.de/story/2000113159783/bildungspolitische-gluehwuermchen (Zugriff: 31.8.2023).

Hußmann, S., Prediger, S. (2007): Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. In: *Praxis der Mathematik in der Schule,* 49(17), 1–8. Online: https://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/07-PM17-Hussmann-Prediger-Differenzieren-Vorabfassung.pdf (Zugriff: 2. 6. 2023, Vorabfassung).

Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen (IQS) (2022): *Mathematik in der iK-M^{PLUS} im Detail. Konstrukt und Kompetenzmodell. Sekundarstufe*. Online: https://www.iqs.gv.at/downloads/nationale-kompetenzerhebung/ikm-plus-sekundarstufe/lehrpersonen (Zugriff: 3. 5. 2023).

Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) (Hrsg.) (2009): *„Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“ – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen*. Universität Klagenfurt. Online: https://www.aau.at/wp-content/uploads/2017/10/sRP-M_September_2009-2.pdf (Zugriff: 3. 5. 2023).

Lacher, M., Künsting, J., Leuders, T., Wessel, L. (2022): Erkunden und Entdecken – ertragreich für Lernende mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen. In: *Der Mathematikunterricht* 68(2), 40–51.

Lambert, A., Hilgers, A. (o. J.). *Füllgraphen – wie man sieht!* Online: https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/funktionen/funktionale-zusammenhaenge-zwischen-fuellgraph-und-gefaess-erkunden/ (Zugriff: 8. 5. 2023).

LBVO (2016). *Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Leistungsbeurteilungsverordnung*, Fassung vom 22.12.2016 (RIS). Online: https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009375&FassungVom=2016-12-22 (Zugriff: 3. 5. 2023).

Leuders, T., Prediger, S. (2012): „Differenziert Differenzieren“ – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In: Lazarides, R.; Ittel, A. (Hrsg.): *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 35–65). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Meyer, H. (2007): *Leitfaden Unterrichtsvorbereitung*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Moser Opitz, E. (2022): Diagnostisches und didaktisches Handeln verbinden: Entwicklung eines Prozessmodells auf der Grundlage von Erkenntnissen aus der pädagogischen Diagnostik und der Förderdiagnostik. In: *Journal für Mathematik-Didaktik,* 43(1), 205–230. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00201-1.

Neuweg, G. H. (2019): *Kompetenzorientierte Leistungsbeurteilung. Pädagogische und rechtliche Hilfestellungen für die Schulpraxis*. Linz: Trauner Verlag.

Plath, J. (2020). Verstehensprozesse bei der Bearbeitung realitätsbezogener Mathematikaufgaben: Klassische Textaufgaben vs. Zeitungstexte. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 41(2), 237–266. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00148-w.

Posamentier, A. S., Krulik, S. (2008): *Problem-solving strategies for* efficient *and* elegant *solutions, grades 6-12: a resource for the mathematics teacher*. 2nd ed. Thousand Oaks: Corwin Press.

Prediger, S. (2008). Mit der Vielfalt rechnen – Aufgaben, Methoden und Strukturen für den Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht. Online Version des Kapitels in Hußmann, S.; Liegmann, A.; Nyssen, E.; Racherbäumer, K.; Walzebug, C. (Hrsg.): *Indive – Individualisieren, Differenzieren, Vernetzen*. Hildesheim: Franzbecker. Online: http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/07-Indive-Differenzieren.pdf (Zugriff: 4. 5. 2023).

Schmidinger, E., Hofmann, F., Stern, T. (2016): Leistungsbeurteilung unter Berücksichtigung ihrer formativen Funktion. In: Bruneforth, M.; Eder, F.; Krainer, K.; Schreiner, C.; Seel, A.; Spiel, C. (Hrsg.): *Nationaler Bildungsbericht Österreich 2015* (Band 2: Fokussierte Analysen bildungspolitischer Schwerpunktthemen, S. 59–94). Graz: Leykam. Online: https://www.iqs.gv.at/themen/bildungsberichterstattung/nationaler-bildungsbericht-2015 (Zugriff: 3. 5. 2023).

Schmidt, C. (2020). *Formatives Assessment in der Grundschule. Konzept, Einschätzungen der Lehrkräfte und Zusammenhänge.* Wiesbaden: Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-658-26921-0.

Sergi, L. (2022): *Das Erstellen von* GeoGebra-*Applets und ihre Anwendungsmöglichkeiten in der 9. Schulstufe AHS.* Universität Wien: Masterarbeit. Online: https://utheses.univie.ac.at/detail/62449/ (Zugriff: 23. 5. 2023).

Sergi, L., Götz, S. (2023): Filling vessels: An exciting way to investigate functional dependencies. In: *North American GeoGebra Journal* 11(1), 35–47. Online: https://mathed.miamioh.edu/index.php/ggbj/article/view/199 (Zugriff: 9. 5. 2023).

Siller, H.-S., Bruder, R., Linnemann, T., Sattlberger, E., Steinfeld, J., Hascher, T. (2019): Kompetenzstufenzuordnungen – mögliches Entscheidungskriterium zur Mathematikaufgaben-Auswahl bei einer standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019, 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (für die GDM herausgegeben von Frank, A.; Krauss. S.; Binder, K.) (S. 1073–1076). Münster: WTM. Online: https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/38706/1/BzMU19_SILLER.pdf (Zugriff: 4. 5. 2023).

Vohns, A., Obereder, T., Egger, J., Scheiber, S. (2019): Textverständnis oder mathematisches Verständnis: Was macht Aufgaben der AHS-Zentralmatura Mathematik schwierig? In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG* 52, 93–112. Online: https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2019%20Band%2052/Vortrag-VohnsOberederEggerScheiber.pdf (Zugriff: 3. 5. 2023).

William, D. (2013): Assessment: The Bridge between Teaching and Learning. In: *Voices from the Middle* 21(2), 15–20.

Verfasser:innen

Stefan Götz
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar Morgenstern-Platz 1
1090 Wien

stefan.goetz@univie.ac.at

Eva Sattlberger
KPH Wien / Krems
Institut für Ausbildung
Mayerweckstraße 1
1210 Wien

eva.sattlberger@kphvie.ac.at